universität wien

MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

„Zur Arithmetik und Geometrie der SL_2 über Ordnungen in Quaternionenalgebren“

Verfasser

Steffen Kionke B.Sc.

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc.)

Wien, 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 066 821
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Prof. Dr. Joachim Schwermer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wie untersucht man eine Gruppe? Eine oftmals nützliche Idee ist es, die Gruppe als Symmetriegruppe eines Objektes zu verstehen. Das heißt, man lässt die Gruppe auf einem geeigneten Raum X wirken. In dieser Arbeit möchten wir diese Idee zur Anwendung bringen.

Sei H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ und $\mathcal{O} \subset H$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung. Die Gruppen, die uns interessieren, sind die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ und torsionsfreie Normalteiler dieser Gruppe. Der Raum auf dem wir diese Gruppen operieren lassen, ist ein geeigneter symmetrischer Raum X. Diesen symmetrischen Raum erhält man als Quotienten $X = {}_K\backslash G$, wobei G die Gruppe der reellen Punkte der algebraischen Gruppe $\mathrm{SL}_n(H)$ ist und $K \subset G$ ist eine maximal kompakte Untergruppe. Sei nun $\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ ein torsionsfreier Normalteiler. Auf offensichtliche Weise wirkt diese Gruppe von rechts auf X, und wegen der Torsionsfreiheit der Gruppe, ist diese Wirkung strikt diskontinuierlich. Der Bahnenraum $X/_\Gamma$ ist also eine Mannigfaltigkeit. Wie kann man nun einen solchen Raum untersuchen? Die naheliegende Idee ist die Bestimmung wichtiger topologischer Invarianten. Zum Beispiel: Die Fundamentalgruppe von $X/_\Gamma$ ist Γ, weil X einfach zusammenhängend ist und die kanonische Abbildung $X \to X/_\Gamma$ eine Überlagerung ist. Der naheliegende nächste Schritt wäre die Bestimmung der Homologie oder Kohomologie der Raumes $X/_\Gamma$. Dies ist im Allgemeinen sehr schwierig, weshalb wir etwas anderes machen werden.

Auf der Quaternionenalgebra H hat man die Konjugationsabbildung $H \to H$, diese ist eine Involution[1] der $\mathbb{Q}$-Algebra H. Durch sie erhält man auch eine Involution auf der zentralen einfachen $\mathbb{Q}$-Algebra $M_n(H)$, und weiter einen Automorphismus der Ordnung zwei $\tau : \mathrm{SL}_n(H) \to \mathrm{SL}_n(H)$. Das heißt, wir haben eine Wirkung der zweielementigen Gruppe $\mathfrak{c}_2 = \{1, \tau\}$ auf $\mathrm{SL}_n(H)$. Diese Wirkung induziert viele weitere: zunächst auf der Gruppe der reellen Punkte, dann eine isometrische Wirkung auf X und schließlich auch eine Wirkung auf $X/_\Gamma$. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Fixpunkte dieser Wirkung zu verstehen.

Wir werden mit einer Methode von Rohlfs sehen, dass wir die Menge der Fixpunkte $(X/_\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ als diskunkte Vereinigung zusammenhängender abgeschlossener Teilmannigfaltigenkeiten $\mathcal{F}(\eta)$ schreiben können, parametrisiert durch die Elemente der ersten nichtabelschen Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)$.

$$(X/_\Gamma)^{\mathfrak{c}_2} = \bigsqcup_{\eta \in H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)} \mathcal{F}(\eta).$$

Sei $\eta \in H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)$ und sei b ein Kozykel dieser Klasse. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{F}(\eta)$ diffeomorph zu $X(b)/_{\Gamma(b)}$ ist, wobei $X(b)$ die Menge der Fixpunkte der b-verdrehten τ-Wirkung auf X ist und $\Gamma(b)$ die Gruppe der Fixpunkte der b-verdrehten τ-Wirkung auf Γ bezeichnet. Außerdem werden wir sehen, dass die auftretenden Mannigfaltigkeiten $X(b)$

[1] Involutionen auf Algebren nennen wir auch gelegentlich involutive Antiautomorphismen.

symmetrische Räume der Form ${}_{\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)}\backslash^{\mathrm{Sp}(p,q)}$ oder ${}_{\mathrm{U}(n)}\backslash^{\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})}$ sind, abhängig davon, ob H über $\mathbb{R}$ verzweigt oder zerfällt. Wir werden dies für $n=2$ spezifizieren und werden in diesem Fall die Anzahl der Zusammenhangskomponenten abschätzen. Das Ergebnis ist Theorem 3.28, welches im Detail Folgendes besagt:

Theorem. Es sei H eine Quaternionen-Divisionsalgebra über dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, sowie $\mathcal{O}\subset H$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung. Wir nehmen an, $\mathcal{O}$ sei ein Hauptidealring dessen Bild unter der reduzierten Spur von H ganz $\mathbb{Z}$ ist. Es bezeichne $\iota:\Gamma\hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ die Inklusion und $\iota_*: H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma)\to H^1(\mathfrak{c}_2,\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ die davon induzierte Abbildung. Sei außerdem $\Gamma\subset\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ein torsionsfreier, τ-invarianter Normalteiler vom Index ℓ.
(1) Falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt, ist $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ disjunkte Vereinigung von jeweils höchstens ℓ Kopien von 6-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$.

$$(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2} = \bigsqcup_{\eta\in\iota_*^{-1}([1,1])}\mathcal{F}_1 \sqcup \bigsqcup_{\eta\in\iota_*^{-1}([1,I_{1,1}])}\mathcal{F}_2$$

Es gilt

$$\mathcal{F}_1\cong \left({}_{\mathrm{U}(2)}\backslash^{\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})}\right)/(\Gamma\cap\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}))\cdot$$

und die Komponenten der Art $\mathcal{F}_2$ treten nur auf, falls ein Kozykel $(1,b)$ für $H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma)$ existiert, der zu dem Kozykel $(1,I_{1,1})$ bzgl. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ kohomolog ist. In diesem Fall gilt $\mathcal{F}_2\cong X(b)/\Gamma(b)$ mit $X(b)\cong {}_{\mathrm{U}(2)}\backslash^{\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})}$.
(2) Falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt, zerlegt sich $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ in eine disjunkte Vereinigung von höchstens $\ell(|\mathcal{P}|+|\mathcal{N}|)$ isolierten Punkten und höchstens ℓ Kopien einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{F}_3$.

$$(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2} = \bigsqcup_{\eta\in\iota_*^{-1}(\mathcal{P}\cup\mathcal{N})}\{\cdot\} \sqcup \bigsqcup_{\eta\in\iota_*^{-1}([1,I_{1,1}])}\mathcal{F}_3$$

Komponenten der Art $\mathcal{F}_3$ treten nur auf, wenn es einen Kozykel $(1,b)$ für $H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma)$ mit Signatur $\mathrm{sig}(b)=(1,1)$ gibt und es gilt dann

$$\mathcal{F}_3\cong\left({}_{\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)}\backslash^{\mathrm{Sp}(1,1)}\right)/\Gamma(b)\cdot$$

Außerdem bezeichnet hier $\mathcal{P}$ (bzw. $\mathcal{N}$) den positiv (bzw. negativ) definiten Teil der Kohomologie $H^1(\mathfrak{c}_2,\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$, d.h. die Klassen aller Kozykel mit Signatur $(2,0)$ (bzw. $(0,2)$).

Zusätzlich werden wir zeigen, dass die Komponenten $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_3$ nicht auftreten, falls $\Gamma\subset\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ eine Kongruenzuntergruppe ist (siehe Satz 3.30).

Warum sind diese Fixpunkte interessant? Die Idee für die Bestimmung der Fixpunkte haben wir aus diversen Arbeiten von Rohlfs [**8, 9, 10**]. In [**9**] betrachtet Rohlfs (ähnlich dem vorliegenden Fall) Kongruenzuntergruppen Γ von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ und eine Involution τ auf X/Γ, die in seiner Arbeit durch Transposition und Inversion auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\to\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ induziert ist. Er zeigt in Proposition 1.9 [**9**], dass die Lefschetzzahl von τ gleich der Euler Charakteristik der Fixpunktmenge $(X/\Gamma)^\tau$ ist. Für uns bedeutet das: Die Struktur der Fixpunktmenge $(X/\Gamma)^\tau$ enthält Information über die Kohomologie von X/Γ.

Wir werden in dieser Arbeit allerdings nicht weiter auf den Zusammenhang zur Lefschetzzahl eingehen und uns vornehmlich der Bestimmung der Fixpunkte und der nicht-abelschen Kohomologie $H^1(\mathfrak{c}_2,\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ widmen. Die nicht-abelsche Galoiskohomologie wird eine wichtige Rolle in dieser Arbeit spielen. Denn um $H^1(\mathfrak{c}_2,\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ zu verstehen, ist es hilfreich erst $H^1(\mathfrak{c}_2,\mathrm{SL}_2(H))$ zu kennen. Wir haben für den Leser im

Anhang A eine kurze Einführung in die nicht-abelsche Galoiskohomologie zusammengestellt, die alles enthält was in dieser Arbeit benötigt wird. Weiterführendes findet man bei Serre [**11**]. Wir wollen eine kurze Übersicht des Inhalts der drei Kapitel geben.

Im ersten Kapitel führen wir zunächst ein, was Quaternionenalgebren sind. Außerdem stellen wir Resultate vor, die für uns nützlich sein werden. Wir möchten dann die nicht-abelsche Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ bestimmen. Dies können wir in der Tat für allgemeines n tun. Dazu betrachten wir zunächst hermitesche Formen auf H-Rechtsvektorräumen und klassifizieren diese. Das entscheidende Hilfsmittel ist der Normensatz von Hasse, Schilling und Maass (Theorem 1.14). Die Stärke dieses Satzes erlaubt es uns, einen Teil der Ergebnisse auch für Quaternionenalgebren über allgemeinen Zahlkörpern zu beweisen. Insbesondere werden wir sehen, dass es im Falle einer Quaternionenalgebra H, die an allen reellen Stellen des Zahlkörpers zerfällt, genau einen nicht-degenerierten quaternionischen Raum der Dimension n gibt (siehe Korollar 1.29). Für Quaternionenalgebren über $\mathbb{Q}$, die über $\mathbb{R}$ verzweigen, werden wir zeigen, dass alle quaternionische Räume durch ihre *Signatur* bis auf Isomorphie bestimmt sind (siehe Korollar 1.36). Danach müssen wir die Ergebnisse lediglich umformulieren, um zu erkennen, dass wir die Kohomologie $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ damit verstehen.

Im zweiten Kapitel betrachten wir dann $\mathbb{Z}$-Ordnungen $\mathcal{O}$ in H, wobei wir natürlich zunächst die notwendigen Begriffe einführen. Uns interessiert weiter die Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$. Unter der Voraussetzung, dass $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring ist, können wir diese Menge bestimmen. Das wichtige Ergebnis ist Satz 2.20, der den sogenannten *indefiniten Teil* von $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}))$ beschreibt. Am Ende des Kapitels führen wir dann die Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma_n(q) \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ ein und zeigen, dass diese für $q \geq 3$ torsionsfrei sind. Die Gruppen $\Gamma_n(q) \cap \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ werden unsere wichtigsten Beipiele für torsionsfreie, τ-invariante Normalteiler der $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ sein. Wir werden außerdem eine Abschätzug für den Index dieser Gruppen herleiten (Lemma 2.30).

Kapitel drei widmet sich dann den geometrischen Eigenschaften der untersuchten Gruppen. Dazu müssen wir die Involution $\tau : \mathrm{SL}_n(H) \to \mathrm{SL}_n(H)$ zunächst auf der Gruppe der reellen Punkte fortsetzen. Die auftretenden Gruppen sind bekannte halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppen, nämlich $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$. Wir definieren was ein symmetrischer Raum ist und werden sehen, dass $X = {}_K\backslash^G$ die Struktur eines symmetrischen Raumes trägt, wenn G eine halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppe und K die Fixpunktgruppe einer Cartan Involution ist. Danach erklären wir, wie Wirkungen auf G isometrische Wirkungen auf X induzieren. Dies werden wir verwenden, um zu zeigen, dass τ eine isometrische Wirkung auf dem symmetrischen Raum induziert. Wie wir sehen werden, kann man diese Wirkung mit Kozykeln für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ *verdrehen* und erhält wieder eine isometrische Wirkung. Wir werden dann die Struktur der Fixpunktmannigfaltigkeiten $X(b)$ aller verdrehten Wirkungen von τ bestimmen. Schlussendlich untersuchen wir dann die Wirkung eines torsionsfreien Normalteilers $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ auf X, sowie die durch τ induzierte Wirkung auf $X/_\Gamma$. Wir sind dann in der Lage mit der Methode von Rohlfs den Raum $(X/_\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ in seine Zusammenhangskomponenten zu zerlegen, sowie die Struktur dieser Komponenten zu bestimmen.

Wir haben uns bemüht eine klare und verständliche Notation zu verwenden. Sollte es dennoch Unklarheiten geben, so könnte die Liste verwendeter Notationen im Anhang B hilfreich sein.

Die Idee zu dieser Arbeit kommt von Herrn Prof. Schwermer, dem ich für seine Unterstützung und sein reichhaltiges Hintergrundwissen herzlich danken möchte.

KAPITEL 1

Quaternionenalgebren und quaternionische Formen

1. Quaternionenalgebren

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst erklären, was eine Quaternionenalgebra ist, und werden dann grundlegende Eigenschaften herleiten. Viele Tatsachen werden allerdings ohne Beweis angeführt. Genaueres zu Quaternionenalgebren findet man zum Beispiel bei Vignéras [**14**]. Später werden wir dann hermitesche Formen auf Vektorräumen über Quaternionenalgebren betrachten. Im Folgenden sei K immer ein Körper, dessen Charakteristik nicht zwei ist.

1.1. Konstruktion von Quaternionenalgebren. Ist R ein kommutativer Ring mit Eins und ist $\sigma : R \to R$ ein Endomorphismus von R, so bezeichne $R[X]^\sigma$ den Schiefpolynomring zu R bezüglich σ in einer Variablen X. Das heißt, die Menge aller endlichen Summen $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ mit $a_i \in R$ zusammen mit der offensichtlichen Addition und der *schiefen* Multiplikation

$$(\sum_i a_i X^i)(\sum_j b_j X^j) \;=\; \sum_k (\sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(b_j))X^k.$$

Klarerweise bildet $R[X]^\sigma$ einen (i.A. nicht kommutativen) Ring mit Eins.

Diese Konstruktion macht es uns nun einfach, Quaternionenalgebren zu konstruieren. Seien dazu $a, b \in K^\times$. Sei außerdem $R = K[X]$ der (gewöhnliche) Polynomring über K. Wir betrachten den K-Endomorphismus $\sigma : K[X] \to K[X]$ mit $\sigma(X) = -X$. Weiter betrachten wir den Quotientenring $L = K[X]/\langle X^2 - a\rangle$. Hier bezeichnet $\langle X^2 - a\rangle$ das von $X^2 - a$ erzeugte Ideal in $K[X]$. Wie man leicht sieht, ist $L = K \oplus Ki$, wobei i die Klasse von X in L bezeichne. Es gilt $i^2 = a$. Da σ das Polynom $X^2 - a$ fest lässt, faktorisiert σ zu $\bar\sigma : L \to L$. Genauer ist hier $\bar\sigma(u + iv) = u - iv$ für alle $u, v \in K$. Wie oben eingeführt, sei nun $L[Y]^{\bar\sigma}$ der Schiefpolynomring zu L bezüglich $\bar\sigma$. Die *Quaternionenalgebra* $Q(a, b|K)$ ist definiert durch

$$Q(a, b|K) \;:=\; L[Y]^{\bar\sigma}/\langle Y^2 - b\rangle.$$

Hier bezeichnet $\langle Y^2 - b\rangle$ das von $Y^2 - b$ erzeugte zweiseitige Ideal. Da allerdings $Y^2 - b$ im Zentrum von $L[Y]^{\bar\sigma}$ liegt, stimmt dieses mit dem von $Y^2 - b$ erzeugten Links- bzw. Rechtsideal überein. Es bezeichne $j \in Q(a, b|K)$ die Klasse von Y. Wie man sieht, besitzt $Q(a, b|K)$ eine direkte Summenzerlegung

$$Q(a, b|K) \;=\; L \oplus Lj \;=\; K \oplus Ki \oplus Kj \oplus Kij$$

mit $i^2 = a$, $j^2 = b$ und $ji = -ij$, sowie $jz = \bar\sigma(z)j$ für alle $z \in L$. $Q(a, b|K)$ ist eine 4-dimensionale K-Algebra, denn K liegt in L und ist invariant unter $\bar\sigma$. Folglich liegt K also auch im Zentrum von $L[Y]^{\bar\sigma}$.

Definition 1.1. Eine *Quaternionenalgebra* ist eine K-Algebra, welche zu einer der konstruierten Algebren $Q(a, b|K)$ mit $a, b \in K^\times$ isomorph ist.

Bemerkung 1.2. In dieser Konstruktion der Quaternionenalgebren scheint es eine Asymmetrie bezüglich a und b zu geben, dies ist aber nicht der Fall. Man kann sich überlegen, dass $Q(a,b|K) = K[X][Y]^\sigma/\langle X^2-a, Y^2-b\rangle$ gilt. In dieser Darstellung spielen a und b vertauschbare Rollen, denn es gilt $K[X][Y]^\sigma = K[X,Y]^-$, wobei $K[X,Y]^-$ der Polynomring in zwei antikommutierenden Variablen ($XY = -YX$) sei. Man sieht somit $Q(a,b|K) \cong Q(b,a|K)$.

Mit dieser Bemerkung ist auch klar, dass die Elemente a und b nicht eindeutig sind. Es gilt übrigens auch $Q(a,b|K) \cong Q(au^2, bv^2|K)$ für alle $u,v \in K^\times$. Folgendes Lemma ist sehr nützlich, um zu erkennen ob eine gegebene Algebra eine Quaternionenalgebra ist (vgl. [**4**, S.301]).

Lemma 1.3. *Ist A eine 4-dimensionale K-Algebra mit einer Basis e_1, e_2, e_3, e_4 über K, sodass gilt $e_1 = 1$, $e_2^2 = a$, $e_3^2 = b$ und $e_4 = e_2e_3 = -e_3e_2$, dann gilt $A \cong Q(a,b|K)$.*

Beweis. Wegen $e_2e_3 = -e_3e_2$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus von K-Algebren $\varphi : K[X,Y]^- \to A$ mit $\varphi(X) = e_2$ und $\varphi(Y) = e_3$. Dieser ist surjektiv, da $e_4 = e_2e_3$ gilt und e_1, e_2, e_3, e_4 eine Basis von A ist. Da das (zweiseitige) Ideal $\langle X^2-a, Y^2-b\rangle$ im Kern von φ liegt, erhalten wir einen K-Homomorphismus $\bar\varphi : Q(a,b|K) \to A$. Dieser ist surjektiv und aus Dimensionsgründen auch injektiv. □

1.2. Quaternionenalgebren sind zentral einfach. Die gerade gegebene Konstruktion von Quaternionenalgebren verbirgt die eigentliche Natur dieser Algebren. Wir wollen in diesem Abschnitt kurz erläutern, warum Quaternionenalgebren genau die zentralen einfachen K-Algebren der Dimension 4 sind.

Zunächst bemerken wir, dass die Algebra $M_2(K)$ der 2×2-Matrizen eine Quaternionenalgebra ist. Dies folgt aus Lemma 1.3, denn $M_2(K)$ ist eine 4-dimensionale K-Algebra, mit Basis $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$. Diese Elemente erfüllen die Relationen aus Lemma 1.3 mit $a = b = 1$. Wir schließen daraus $Q(1,1|K) \cong M_2(K)$. Damit können wir die für uns interessante Proposition beweisen.

Proposition 1.4. *Die Quaternionenalgebren sind genau die zentralen einfachen K-Algebren der Dimension vier.*

Beweis. Sei $H = Q(a,b|K)$ eine Quaternionenalgebra. H ist zentral, denn ist $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3ij$ im Zentrum, so vertauscht x mit i und j, d.h. $[i,x] = ix - xi = 0$ und $[j,x] = jx - xj = 0$. Rechnet man dies aus, so ergibt sich

$$0 = ix - xi = 2x_2ij + 2ax_3j\,, \qquad 0 = jx - xj = -2x_1ij - 2bx_3i.$$

Man schließt also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und damit $x \in K$. Klarerweise liegt K im Zentrum von H, weil wir schon festgestellt haben, dass H eine K-Algebra ist. Also ist H zentral. Die Einfachheit von H folgt auf ähnliche Weise. Ist $I \neq (0)$ ein zweiseitiges Ideal und $x \neq 0$ aus I, so kann man durch zweifaches Kommutator nehmen mit i,j bzw. ij zeigen, dass I eine Einheit enthält. Details findet man in Jantzen, Schwermer [**4**, S.302].

Sei nun S eine zentrale, einfache K-Algebra der Dimension vier. Wir wollen zeigen, dass S eine Quaternionenalgebra ist. Nach dem Struktursatz von Wedderburn (siehe z.B. Jantzen, Schwermer [**4**, S.315, Satz 5.1]) gibt es eine ganze Zahl s und eine zentrale K-Divisionsalgebra D, sodass $S \cong M_s(D)$ gilt. Wegen $\dim_K S = 4 = s^2 \dim_K D$ gilt $s = 1$ oder $s = 2$.

Ist $s = 2$, so ist $S \cong M_2(K) \cong Q(1,1|K)$, also eine Quaternionenalgebra.

Ist $s = 1$, so ist $S = D$ eine Divisionsalgebra. Unter Verwendung von [**4**, S.325, Satz 7.9] erhalten wir einen strikt maximalen Teilkörper L von D, sodass L/K eine separable

Körpererweiterung ist. In unserem Fall ist L/K sogar eine Galoiserweiterung, weil es sich um eine quadratische Erweiterung handelt. Sagen wir $L = K(\sqrt{a})$ für ein $a \in K^\times$, und sei $\sigma : L \to L$ der nicht-triviale Galoisautomorphismus. Notieren wir mit $\iota : L \hookrightarrow D$ die Inklusion von L in D und betrachten wir den K-Algebrenhomomorphismus $\iota \circ \sigma : L \to D$. Da L eine einfache und D eine zentral einfache Algebra über K ist, existiert nach dem Satz von Skolem und Noether [**4**, S.320, Satz 6.1] eine Einheit $j \in D^\times$, sodass

$$\sigma(x) = jxj^{-1}$$

für alle $x \in L$ gilt. Es gilt natürlich $j \notin L$, weil σ nicht die Identität auf L ist und damit $D = L \oplus Lj$. Und wegen $\sigma^2 = \mathrm{id}_L$ ist $j^2 \in L^\times$. Wendet man nun σ auf j^2 an, so sieht man $\sigma(j^2) = j^2$, also sogar $j^2 = b \in K^\times$. Setzt man nun $i = \sqrt{a} \in L$, so ist $1, i, j, ij$ eine K-Basis von D und mit Lemma 1.3 folgt, dass D eine Quaternionenalgebra ist. □

KOROLLAR 1.5. *Jede Quaternionenalgebra ist entweder isomorph zu $M_2(K)$ oder eine Divisionsalgebra.*

Es ist relativ einfach zu überprüfen, ob eine Quaternionenalgebra $Q(a, b|K)$ eine Divisionsalgebra ist. Folgendes Kriterium findet sich z.B. bei Vignéras [**14**, S.11,Cor.3.2].

PROPOSITION 1.6. *Sei $H = Q(a, b|K)$ mit $a, b \in K^\times$. Folgende Aussagen sind äquivalent*

(1) *H ist isomorph zu $M_2(K)$*
(2) *Die quadratische Form $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 - z^2$ ist isotrop[1] über K.*
(3) *Es gibt $x, y \in K$ mit $ax^2 + by^2 = 1$*

So sieht man beispielsweise, dass Quaternionenalgebren der Form $Q(a, b|\mathbb{Q})$ mit negativen a und b immer Divisionsalgebren sind.

1.3. Konjugation, Norm und Spur. Sei $H = Q(a, b|K)$ eine Quaternionenalgebra. Die oben betrachtete Abbildung $\bar{\sigma} : L \to L$ heißt Konjugation auf L. Diese notieren wir im Weiteren mit $\overline{x} := \bar{\sigma}(x)$. Es gilt also $\overline{u + vi} = u - vi$. Diese Konjugation wollen wir nun auf die Quaternionenalgebra H ausdehnen. Ist $x = w_1 + w_2 j \in H$ mit $w_1, w_2 \in L$ so definieren wir

$$\overline{x} = \overline{w_1} - w_2 j.$$

Dies definiert eine Abbildung von H nach H: die *Konjugation* auf H.

LEMMA 1.7. *Die Konjugation auf H ist ein involutiver Antiautomorphismus, d.h. es gilt $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ und $\overline{\overline{x}} = x$ für alle $x, y \in H$.*

BEWEIS. Die Additivität der Konjugation ist klar, ebenso $\overline{\overline{x}} = x$. Betrachten wir also $x = w_1 + w_2 j$ und $y = v_1 + v_2 j$ aus H. Dann gilt

$$xy = (w_1 v_1 + b w_2 \overline{v_2}) + (w_2 \overline{v_1} + w_1 v_2) j$$

und damit erhält man

$$\overline{xy} = (\overline{v_1}\,\overline{w_1} + b v_2 \overline{w_2}) - (w_2 \overline{v_1} + w_1 v_2) j = (\overline{v_1} - v_2 j)(\overline{w_1} - w_2 j) = \overline{y}\,\overline{x}$$

□

[1]Isotrop bedeutet hier, dass eine nicht-triviale Lösung der Gleichung $q(x, y, z) = 0$ mit x, y, z in K existiert.

Man überlegt sich leicht, wie die Konjugation bezüglich der Zerlegung $H = K \oplus Ki \oplus Kj \oplus Kij$ aussieht. Es gilt für $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij$ mit $x_0, x_1, x_2, x_3 \in K$ nämlich $\overline{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 ij$.

Wichtig für das Arbeiten mit Quaternionenalgebren sind zwei Abbildungen von H nach K: Die (reduzierte) Norm und die (reduzierte) Spur. Wir definieren für $x \in H$ die Norm $\mathfrak{n}(x)$ und die Spur $t(x)$ von x durch:

$$\mathfrak{n}(x) = x\overline{x}\,, \qquad t(x) = x + \overline{x}.$$

LEMMA 1.8. *Für alle $x \in H$ liegen $\mathfrak{n}(x)$ und $t(x)$ in K, wobei wir hier K mit dem Bild der natürlichen Einbettung $K \hookrightarrow H$, definiert durch $k \mapsto k \cdot 1$, identifizieren. Weiter gilt $\mathfrak{n}(xy) = \mathfrak{n}(x)\mathfrak{n}(y)$ für alle $x, y \in H$ und die Spur t ist K-linear.*

BEWEIS. Ist $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij$ aus H, so zeigt man durch Rechnung

$$\mathfrak{n}(x) = x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab x_3^2\,, \qquad t(x) = 2x_0,$$

damit ist klar, dass Norm und Spur in K liegen. Ebenso folgt sofort, dass die Spur K-linear ist. Die Multiplikativität der Norm folgt nun aus der Tatsache, dass K im Zentrum von H liegt, denn es ist

$$\mathfrak{n}(xy) = xy\overline{xy} = xy\overline{y}\,\overline{x} = x\mathfrak{n}(y)\overline{x} = \mathfrak{n}(x)\mathfrak{n}(y),$$

wobei im letzten Schritt $\mathfrak{n}(y)$ mit $\overline{x}$ vertauscht wird. □

Die Spur liefert zusätzlich eine nicht-degenerierte Bilinearform auf H.

LEMMA 1.9. *Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\, H \times H \to K$, definiert durch $\langle x, y\rangle := t(xy)$, ist K-bilinear und nicht-degeneriert.*

BEWEIS. Aufgrund der Linearität der Spur-Abbildung: $t : H \to K$ ist die Bilinearität leicht einzusehen. Sei nun $x \in H$ mit $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in H$. Wir werden $x = 0$ zeigen. Schreibe $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij$. Man sieht leicht, dass gilt

$$\begin{aligned} 0 = t(x1) &= 2x_0 \\ 0 = t(xi) &= 2ax_1 \\ 0 = t(xj) &= 2bx_2 \\ 0 = t(xij) &= -2abx_3. \end{aligned}$$

Nun kann man sofort $x = 0$ schließen, da wir immer $a, b \neq 0$ und $\operatorname{char}(K) \neq 2$ voraussetzen. □

1.4. Quaternionenalgebren über Zahlkörpern. Wir interessieren uns vor allem für Quaternionenalgebren über algebraischen Zahlkörpern, das heißt über endlichen algebraischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$. Wir wollen in diesem Abschnitt dazu wichtige Resultate ohne Beweis zitieren.

BEMERKUNG 1.10. Ist K ein beliebiger Körper von Charakteristik ungleich zwei und ist F/K eine Körpererweiterung, so sieht man mit Lemma 1.3 leicht, dass gilt

$$Q(a, b|K) \otimes_K F \cong Q(a, b|F).$$

Dies kann man verwenden, um eine Quaternionenalgebra an ihren verschiedenen Stellen zu betrachten. Wichtig dabei ist, dass es an den lokalen Stellen nur sehr wenige verschiedene Quaternionenalgebren gibt. Nachstehender nützlicher Satz findet sich z.B. bei Vignéras [**14**, S.31].

Theorem 1.11 (Klassifikation von Quaternionenalgebren auf lokalen Körpern). *Ist $K \neq \mathbb{C}$ ein lokaler Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$), so gibt es bis auf Isomorphie genau eine Quaternionenalgebra über K, die Divisionsalgebra ist.*

Beispielsweise ist über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ diese eindeutige quaternionische Divisionsalgebra gerade der Schiefkörper $\mathbb{H} = Q(-1,-1|\mathbb{R})$ der *Hamiltonschen* Quaternionen.

Über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist $M_2(\mathbb{C})$ (bis auf Isomorphie) die einzige Quaternionenalgebra, weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass über algebraisch abgeschlossenen Körpern jede endlich dimensionale Divisionsalgebra schon isomorph zum Körper selbst ist (siehe [**4**, S.306]).

Sei nun K ein algebraischer Zahlkörper. Wir bezeichnen mit V die Menge der Stellen von K, mit V_∞, bzw. V_f bezeichnen wir die Menge der archimedischen, bzw. nicht archimedischen Stellen. Ist $v \in V$ eine Stelle, so notieren wir mit K_v die Vervollständigung von K an dieser Stelle. Die Einbettung von K in die Vervollständigung K_v nennen wir $\sigma_v : K \to K_v$.

Definition 1.12. Ist H eine Quaternionenalgebra über K und $v \in V$ eine Stelle von K, so sagen wir H *zerfällt* an der Stelle v, falls $H \otimes_K K_v \cong M_2(K_v)$. Sonst sagen wir H *verzweigt* in v. In diesem Fall ist $H \otimes_K K_v$ der eindeutige quaternionische Schiefkörper über K_v.

Die Menge aller Stellen an denen H verzweigt, bezeichnen wir mit $\mathrm{Ram}(H)$. Auch die Quaternionenalgebren über Zahlkörpern sind vollständig klassifiziert. Den folgenden Satz findet man in [**14**, S.74].

Theorem 1.13. *Für jede Quaternionenalgebra H über einem Zahlkörper K besteht die Menge $\mathrm{Ram}(H)$ aus einer endlichen, geraden Anzahl von Stellen. Umgekehrt gibt es für jede endliche Menge von Stellen $S \subseteq V$ mit gerader Kardinalität $|S|$, eine bis auf Isomorphie eindeutige Quaternionenalgebra H über K, sodass $S = \mathrm{Ram}(H)$ gilt.*

Wenn wir im nächsten Abschnitt Vektorräume und hermitesche Formen auf solchen Vektorräumen betrachten, wird die Normabbildung eine wichtige Rolle spielen. Die wichtige Frage wird sein: Welche Werte nimmt die Normabbildung $\mathfrak{n} : H \to K$ an? Diese Frage wird mit folgendem sehr nützlichen Resultat beantwortet.

Theorem 1.14 (Normensatz von Hasse, Schilling und Maass). *Sei H eine Quaternionenalgebra über einem algebraischen Zahlkörper K. Ein Element $y \in K^\times$ liegt genau dann im Bild der Normabbildung $\mathfrak{n} : H \to K$, wenn für alle reellen Stellen $v \in \mathrm{Ram}(H)$ das Bild von y unter der Einbettung $\sigma_v : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ positiv ist.*

Dieser Satz gilt auch allgemein für zentrale einfache Algebren, wobei die Normabbildung dann die reduzierte Norm ist. Einen Beweis findet man bei Vignéras [**14**, S.80, Thm. 4.1] für Quaternionenalgebren und allgemein für zentrale einfache Algebren bei Reiner [**7**, S.289, Thm. 33.15].

Beispiel 1.15. Wir wollen den Satz in einigen einfachen Fällen zur Anwendung bringen. Sei zunächst $K = \mathbb{Q}$ und $H/\mathbb{Q}$ eine Quaternionenalgebra. Der Körper $\mathbb{Q}$ hat genau eine reelle Stelle, wir müssen also zwei Fälle unterscheiden.

- Ist $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$, so ist $\mathfrak{n}(H) = \mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.
- Ist $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$, so gilt $\mathfrak{n}(H) = \mathbb{Q}$.

Ist K ein algebraischer Zahlkörper, der keine reellen Einbettungen besitzt (z.B. $\mathbb{Q}(i)$), so ist für jede Quaternionenalgebra über K das Bild der Normabbildung ganz K.

2. Quaternionische Formen und Vektorräume

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit Vektorräumen über quaternionischen Schiefkörpern und quaternionischen Formen auf diesen beschäftigen. Sei K ein Körper[2] und sei H immer eine Quaternionen-*Divisionsalgebra* über K.

2.1. Quaternionische Vektorräume. Wir betrachten jetzt endlich dimensionale H-Rechtsvektorräume, die wir *quaternionische Vektorräume* nennen wollen. Es sei kurz erwähnt, dass für Rechtsvektorräume über Divisionsalgebren beinahe alle grundlegenden Ergebnisse der linearen Algebra erhalten bleiben. Es gibt insbesondere Basen und Vektorraumkomplemente für jeden Untervektorraum. Jeder H-Rechtsvektorraum E ist in natürlicher Weise auch ein K-Vektorraum und es gilt $\dim_K E = 4\dim_H E$. Sind E und F zwei quaternionische Vektorräume, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_H(E,F)$ die Menge der H-Vektorraumhomomorphismen von E nach F. $\mathrm{Hom}_H(E,F)$ ist in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe. Denn sind $\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}_H(E,F)$, so auch die Abbildung $\varphi+\psi$, definiert durch $(\varphi+\psi)(v) := \varphi(v)+\psi(v)$ für alle $v \in E$. Im Spezialfall $F = H$ wird $\mathrm{Hom}_H(E,H)$ sogar ein H-Linksvektorraum, indem man für $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(E,H)$ und $a \in H$ das Produkt $a\varphi$ definiert durch $(a\varphi)(v) := a\varphi(v)$ für alle $v \in E$. Diesen H-Linksvektorraum $E^* = \mathrm{Hom}_H(E,H)$ nennen wir den *Dualraum* von E. Es gilt $\dim_H E = \dim_H E^*$, weil wir (wie im Falle von Vektorräumen über Körpern) zu einer gegebenen Basis von E eine duale Basis in E^* finden können.

Ist V ein H-Linksvektorraum, so kann man diesen leicht zu einen Rechtsvektorraum über H machen, indem man $v \cdot a := \overline{a}v$ setzt für alle $v \in V$ und $a \in H$. Wir wollen auf diese Weise den Dualraum E^* eines quaternionischen Vektorraumes E selbst wieder als quaternionischen Vektorraum auffassen.

2.2. Basen und Matrix-Algebren. Seien E und F quaternionische Vektorräume. Wie im kommutativen Fall können wir, nach Wahl von Basen für E und F, Vektorraumhomomorphismen $E \to F$ als Matrizen darstellen. Seien $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ und $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_m)$ geordnete H-Basen von E bzw. F. Wir erhalten einen Isomorphismus $\phi_{\mathcal{E}} : E \xrightarrow{\cong} H^n$ durch $\sum_{i=1}^n e_i a_i \mapsto (a_1,\dots a_n)^T$. Und analog erhält man $\phi_{\mathcal{F}} : F \to H^m$ für F. Ist also $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(E,F)$, so können wir diesen Homomorphismus bzgl. der Basen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ als Matrix schreiben. Man schreibt $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m f_i c_{ij}$ und setzt $C = (c_{ij}) \in M_{(m\times n)}(H)$. Dann gilt $\phi_{\mathcal{F}}(\varphi(v)) = C\phi_{\mathcal{E}}(v)$ für alle $v \in E$.

Wir wollen uns nun die Menge $M_n(H)$ aller $n\times n$ Matrizen über H genauer anschauen. Da H eine zentrale einfache K-Algebra ist, ist auch $M_n(H)$ eine zentrale einfache K-Algebra, denn $M_n(H) \cong H \otimes_K M_n(K)$, und Tensorprodukte zentraler einfacher K-Algebren sind zentral einfach (siehe z.B. [**4**, S. 314]). Die Multiplikation auf $M_n(H)$ ist dabei die gewöhnliche Multiplikation von Matrizen. Die Gruppe der Einheiten in $M_n(H)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{GL}_n(H)$. Im Allgemeinen gibt es für Matrizen über nichtkommutativen Ringen keine sinnvolle Definition für die Determinante. In unserem Fall finden wir aber einen nützlichen Ersatz, was wir der Tatsache verdanken, dass $M_n(H)$ zentral einfach über K ist. Holen wir dazu etwas weiter aus:

Sei A eine zentrale, einfache, endlich dimensionale K-Algebra. So gibt es bekanntlich einen Erweiterungskörper L von K welcher A zerfällt, d.h. $A \otimes_K L \cong M_s(L)$ für eine natürliche Zahl s. Sei also $\psi : A \otimes_K L \xrightarrow{\cong} M_s(L)$ eine solche Zerfällung. Wir definieren für alle $x \in A$ die *reduzierte Norm* $\mathsf{nrd}_{A/K}(x)$ durch $\mathsf{nrd}_{A/K}(x) = \det(\psi(x \otimes 1))$ und die *reduzierte Spur* $\mathsf{tr}_{A/K}(x) = \mathsf{tr}(\psi(x \otimes 1))$. Nach [**7**, Thm. 9.3, S.113] ist diese Definition

[2] Wie immer gelte $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

unabhängig vom gewählten Zerfällungskörper L und unabhängig von der gewählten Zerfällung ψ. Außerdem nehmen reduzierte Norm und Spur nur Werte in K an. Wie man leicht sieht, ist die reduzierte Spur K-linear und die reduzierte Norm ist multiplikativ. Außerdem ist die Gruppe der Einheiten in A gegeben durch

$$A^\times = \{\, x \in A \mid \mathsf{nrd}_{A/K}(x) \neq 0 \,\}.$$

BEMERKUNG 1.16. Die auf der Quaternionenalgebra H definierte Norm $\mathfrak{n}$ bzw. Spur t sind genau die reduzierte Norm bzw. reduzierte Spur, wenn man H als zentral einfache K-Algebra betrachtet.

Die reduzierte Norm auf $M_n(H)$ wird uns als Ersatz für die Determinante dienen. Wir wollen sie kurz mit nrd statt $\mathsf{nrd}_{M_n(H)/K}$ notieren. Nach den gerade gefundenen Eigenschaften der reduzierten Norm gilt also:

$$\mathrm{GL}_n(H) = \{\, X \in M_n(H) \mid \mathsf{nrd}(X) \neq 0 \,\}.$$

Außerdem liefert uns die reduzierte Norm einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathsf{nrd} : \mathrm{GL}_n(H) \to K^\times.$$

BEMERKUNG 1.17. Sei L eine Körpererweiterung von K. Wegen $M_n(H) \otimes_K L \cong M_n(H \otimes_K L)$ zerfällt $M_n(H)$ über L genau dann, wenn H über L zerfällt. Ist K ein algebraischer Zahlkörper, so verwenden wir den Normensatz von Hasse, Schilling und Maass in seiner allgemeinen Version für zentral einfache Algebren (siehe [**7**, S.289, Thm. 33.15]) um zu schließen, dass die reduzierte Norm nrd auf $M_n(H)$ genau dieselben Werte annimmt, wie die Norm $\mathfrak{n}$ der Quaternionenalgebra H.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Konjugation auf H einen involutiven Antiautomorphismus auf $M_n(H)$ finden. Sei zunächst $C \in M_{(m\times n)}(H)$, wir bezeichnen mit $C^* := \overline{C}^T \in M_{(n\times m)}(H)$ die Matrix, die man erhält, indem man alle Einträge von C konjugiert und anschließend die Matrix transponiert. Genauer: Der i-j-te Eintrag von C^* ist $C^*_{ij} = \overline{C_{ji}}$. Dieselbe Notation wollen wir auch für Vektoren in H^n verwenden, wobei wir diese immer als Spaltenvektoren auffassen.

LEMMA 1.18. *Für beliebige Matrizen $C \in M_{(m\times n)}(H)$ und $D \in M_{(n\times k)}(H)$ gilt $(CD)^* = D^*C^*$, sowie $(C^*)^* = C$. Insbesondere definiert die Abbildung*

$$\cdot^* : M_n(H) \to M_n(H) \quad \textit{mit} \quad C \mapsto C^*$$

einen involutiven Antiautomorphismus auf $M_n(H)$.

BEWEIS. Seien $C \in M_{(m\times n)}(H)$ und $D \in M_{(n\times k)}(H)$ gegeben.
Für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ und $j \in \{1,\ldots,m\}$ gilt

$$(CD)^*_{ij} = \overline{(CD)_{ji}} = \overline{\sum_{\ell=1}^{n} C_{j\ell}D_{\ell i}} = \sum_{\ell=1}^{n} \overline{D_{\ell i}}\,\overline{C_{j\ell}} = \sum_{\ell=1}^{n} D^*_{i\ell}C^*_{\ell j} = (D^*C^*)_{ij}.$$

Damit folgt die Behauptung, denn für $C, D \in M_n(H)$ sind $(C+D)^* = C^* + D^*$ und $(C^*)^* = C$ offensichtlich. □

Diesem Lemma liegt ein allgemeines Prinzip zu Grunde: Eine Involution - oder involutiver Antiautomorphismus, wie wir etwas pedantisch sagen - auf einer Algebra A lässt sich immer zu einer Involution auf der Matrixalgebra $M_n(A)$ fortsetzen, indem man sie mit der Transposition kombiniert.

Im Weiteren wollen wir noch einige nützliche Eigenschaften der reduzierten Norm auf $M_n(H)$ herleiten. Dazu werden wir eine Zerfällung von $M_n(H)$ explizit angeben.

2.2.1. *Reduzierte Norm und Zerfällung.* Wir betrachten eine Quaternionenalgebra $H = Q(a,b|K)$, die nicht isomorph zu $M_2(K)$ sei. Dann ist das Polynom $X^2 - a$ irreduzibel über K, wie man z.B. durch Proposition 1.6 sieht. Setze

$$L \;=\; K(\sqrt{a}) \;\cong\; K[X]/\left\langle X^2 - a\right\rangle .$$

Die Algebra H zerfällt über L, denn $H \otimes_K L \cong Q(a,b|L) \cong M_2(L)$. Man kann eine Zerfällung $\mathfrak{z}$ nun explizit angeben, indem man Lemma 1.3 verwendet.

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} : H \otimes_K L \;&\to\; M_2(L) \\ i \otimes 1 \;&\mapsto\; \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{smallmatrix}\right) \\ j \otimes 1 \;&\mapsto\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\mathfrak{z}((x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij) \otimes 1) \;=\; \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & b(x_2 + x_3\sqrt{a}) \\ x_2 - x_3\sqrt{a} & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Wie wir bei der Konstruktion von Quaternionenalgebren gesehen haben, gilt $H = L \oplus Lj$ mit $j^2 = b$ und $jz = \overline{z}j$ für alle $z \in L$. Verwendet man dies, so erhält man eine einfachere Formel, die man sich leicht merken kann:

$$\mathfrak{z}((z_1 + z_2 j) \otimes 1) \;=\; \begin{pmatrix} z_1 & bz_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}.$$

Dies werden wir benutzen, um eine Zerfällung von $M_n(H)$ zu konstruieren, welche sich noch als nützlich erweisen wird. Dazu verknüpfen wir mehrere einfache Isomorphismen.

$$M_n(H) \otimes_K L \;\overset{\cong}{\to}\; M_n(H \otimes_K L) \;\overset{\cong}{\to}\; M_n(M_2(L)) \;\overset{\cong}{\to}\; M_2(M_n(L)) \;\overset{\cong}{\to}\; M_{2n}(L)$$

Der zweite Isomorphismus ist dabei der von der Zerfällung $\mathfrak{z}$ induzierte. Nun müssen wir nur nachvollziehen, was dies für eine Matrix $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$ ergibt. Sei dazu $A = B + Cj$ mit $B, C \in M_n(L)$, also $a_{kl} = b_{kl} + c_{kl} j$ mit $b_{kl}, c_{kl} \in L$. Lassen wir also $A \otimes 1$ obige Folge von Isomorphismen durchlaufen:

$$\begin{aligned} A \otimes 1 &\mapsto (a_{kl} \otimes 1)_{k,l=1}^n \mapsto (\mathfrak{z}(a_{kl} \otimes 1))_{k,l=1}^n = (\begin{pmatrix} b_{kl} & bc_{kl} \\ \overline{c_{kl}} & \overline{b_{kl}} \end{pmatrix})_{k,l=1}^n \\ &\mapsto \begin{pmatrix} (b_{kl})_{k,l} & b(c_{kl})_{k,l} \\ (\overline{c_{kl}})_{k,l} & (\overline{b_{kl}})_{k,l} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} B & bC \\ \overline{C} & \overline{B} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir werden auch diese Zerfällung mit $\mathfrak{z}$ notieren. Des Weiteren erhalten wir eine Formel für die reduzierte Norm: $\mathsf{nrd}(A) = \det\left(\begin{smallmatrix} B & bC \\ \overline{C} & \overline{B} \end{smallmatrix}\right)$.

Lemma 1.19 (Eigenschaften der reduzierten Norm). *Sei* $\mathsf{nrd} : M_n(H) \to K$ *die reduzierte Norm auf der zentralen einfachen K-Algebra $M_n(H)$. Es gilt für alle $A = B + Cj \in M_n(H)$:*

(1) $\mathsf{nrd}(A^*) = \mathsf{nrd}(A)$.
(2) *Ist* $D = \mathrm{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *eine Diagonalmatrix, so ist* $\mathsf{nrd}(D) = \prod_{i=1}^n \mathfrak{n}(\omega_i)$.
(3) *Ist* $\omega \in H$, *dann gilt* $\mathsf{nrd}(\omega A) = \mathfrak{n}(\omega)^n \mathsf{nrd}(A)$.

Beweis. Zu (1): Sei $A = B + Cj$, dann ist $A^* = B^* - C^T j$. Wir erhalten also $\mathfrak{z}(A^*) = \left(\begin{smallmatrix} B^* & -bC^T \\ -C^* & B^T \end{smallmatrix}\right)$. Sei u in $M_{2n}(K)$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$, wobei 1_n hier die Einheitsmatrix in $M_n(K)$ bezeichnet. Wie man leicht sieht ist

$$u\mathfrak{z}(A^*)u^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} B^T & C^* \\ bC^T & B^* \end{pmatrix} \;=\; \mathfrak{z}(A)^T.$$

Damit folgt die Behauptung, denn es gilt

$$\mathsf{nrd}(A^*) \;=\; \det(\mathfrak{z}(A^*)) \;=\; \det(u\mathfrak{z}(A^*)u^{-1}) \;=\; \det(\mathfrak{z}(A)^T) \;=\; \mathsf{nrd}(A).$$

Zu (2): Aufgrund der Multiplikativität der reduzierten Norm nrd genügt es die Behauptung für Matrizen der Form $D = \operatorname{diag}(\omega, 1, \ldots, 1)$ zu zeigen. Dies sieht man aber leicht ein, denn durch umsortieren erhält man

$$\mathsf{nrd}(D) \;=\; \det \begin{pmatrix} x & by & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{y} & \overline{x} & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \;=\; x\overline{x} - by\overline{y} \;=\; \mathfrak{n}(\omega)$$

wobei $\omega = x + yj$ mit $x, y \in L$ sei.

Zu (3): Dies folgt sofort mit (2), denn $\mathsf{nrd}(\omega A) = \mathsf{nrd}(\omega 1_n)\mathsf{nrd}(A)$. □

Wir werden uns später hauptsächlich mit dem Fall $n = 2$ befassen. Deshalb wollen wir nun eine explizite Formel für die reduzierte Norm $\mathsf{nrd} : M_2(H) \to K$ herleiten.

Lemma 1.20. *Es sei $A \in M_2(H)$ gegeben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right)$ mit $x, y, z, w \in H$. Dann gilt*

$$\mathsf{nrd}(A) \;=\; \mathfrak{n}(x)\mathfrak{n}(w) + \mathfrak{n}(y)\mathfrak{n}(z) - t(\overline{z}x\overline{y}w).$$

Beweis. Der Beweis ist lediglich eine längere Rechnung. Man schreibt $x = x_1 + x_2 j$, $y = y_1 + y_2 j$, $z = z_1 + z_2 j$ und $w = w_1 + w_2 j$ mit $x_i, y_i, z_i, w_i \in L$ für $i = 1, 2$. Nun gilt also

$$\mathsf{nrd}(A) \;=\; \det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 & bx_2 & bz_2 \\ y_1 & w_1 & by_2 & bw_2 \\ \overline{x_2} & \overline{z_2} & \overline{x_1} & \overline{z_1} \\ \overline{y_2} & \overline{w_2} & \overline{y_1} & \overline{w_1} \end{pmatrix}.$$

Zunächst erhält man (z.B. durch Entwicklung an der ersten Spalte) 24 Terme:

$$\begin{aligned} \mathsf{nrd}(A) \;&= x_1\big(w_1\overline{x_1}\overline{w_1} + by_2\overline{z_1}\overline{w_2} + bw_2\overline{z_2}\overline{y_1} - b\overline{w_2}\overline{x_1}w_2 - by_2\overline{z_2}\overline{w_1} - w_1\overline{y_1}\overline{z_1}\big) \\ &-y_1\big(z_1\overline{x_1}\overline{w_1} + bx_2\overline{z_1}\overline{w_2} + bz_2\overline{z_2}\overline{y_1} - bz_2\overline{w_2}\overline{x_1} - z_1\overline{z_1}\overline{y_1} - bx_2\overline{z_2}\overline{w_1}\big) \\ &+\overline{x_2}\big(bz_1y_2\overline{w_1} + b^2x_2w_2\overline{w_2} + bw_1z_2\overline{y_1} - b^2y_2z_2\overline{w_2} - bx_2w_1\overline{w_1} - bw_2z_1\overline{y_1}\big) \\ &-\overline{y_2}\big(by_2z_1\overline{z_1} + b^2x_2w_2\overline{z_2} + bw_1z_2\overline{x_1} - b^2y_2z_2\overline{z_2} - bw_1x_2\overline{z_1} - bw_2z_1\overline{x_1}\big) \end{aligned}$$

Nun sortiert man alle Terme heraus die Produkt zweier Normen sind, z.B. $x_1\overline{x_1}w_1\overline{w_1}$, und ordnet die anderen Terme schön an. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathsf{nrd}(A) \;&= \mathfrak{n}(x_1)\mathfrak{n}(w_1) - b\mathfrak{n}(w_2)\mathfrak{n}(x_1) - b\mathfrak{n}(y_1)\mathfrak{n}(z_2) + \mathfrak{n}(y_1)\mathfrak{n}(z_1) \\ &\quad + b^2\mathfrak{n}(x_2)\mathfrak{n}(w_2) - b\mathfrak{n}(w_1)\mathfrak{n}(x_2) - b\mathfrak{n}(z_1)\mathfrak{n}(y_2) + b^2\mathfrak{n}(z_2)\mathfrak{n}(y_2) \\ &\quad + x_1\overline{z_1}(by_2\overline{w_2} - \overline{y_1}w_1) + bx_1\overline{z_2}(w_2\overline{y_1} - y_2\overline{w_1}) \\ &\quad - y_1\overline{w_1}(z_1\overline{x_1} - bx_2\overline{z_2}) - by_1\overline{w_2}(x_2\overline{z_1} - z_2\overline{x_1}) \\ &\quad + b\overline{x_2}z_1(y_2\overline{w_1} - w_2\overline{y_1}) + b\overline{x_2}z_2(w_1\overline{y_1} - by_2\overline{w_2}) \\ &\quad - b\overline{y_2}w_2(bx_2\overline{z_2} - \overline{x_1}z_1) - b\overline{y_2}w_1(z_2\overline{x_1} - x_2\overline{z_1}) \end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{n}(x) = \mathfrak{n}(x_1) - b\mathfrak{n}(x_2)$ erhält man aus den ersten zwei Zeilen genau $\mathfrak{n}(x)\mathfrak{n}(w) + \mathfrak{n}(z)\mathfrak{n}(y)$. Durch weiteres Ausklammern erhält man aus den letzten vier Zeilen noch $t\big(b(x_1\overline{z_2} - z_1\overline{x_2})(w_2\overline{y_1} - y_2\overline{w_1}) + (x_1\overline{z_1} - bz_2\overline{x_2})(by_2\overline{w_2} - w_1\overline{y_1})\big)$. Wie man leicht nachrechnet ist dieser Ausdruck genau $-t(\overline{z}x\overline{y}w)$. Dies beendet den Beweis. □

2.3. Quaternionische Formen. Im Folgenden werden wir hermitesche Formen auf quaternionischen Vektorräumen betrachten. Dazu fixieren wir eine Quaternionenalgebra H. Alle quaternionischen Vektorräume in diesem Abschnitt sind Vektorräume über dieser Divisionsalgebra H.

Definition 1.21. Sei E ein quaternionischer Vektorraum. Eine *quaternionische Form* auf E ist eine Abbildung $b : E \times E \to H$, die folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $b(u+v,w) = b(u,w) + b(v,w)$ und $b(u, v+w) = b(u,v) + b(u,w)$,
(2) $b(u, vx) = b(u,v)x$ und $b(ux, v) = \overline{x}b(u,v)$,
(3) $b(u,v) = \overline{b(v,u)}$,

für alle $u, v, w \in E$ und $x \in H$.

Jede quaternionische Form $b : E \times E \to H$ induziert einen Homomorphismus $\hat{b} : E \to E^*$ quaternionischer Vektorräume durch $\hat{b}(v)(w) := b(v,w)$. Die Additivität von $\hat{b}$ folgt aus Eigenschaft (1) von b. Um $\hat{b}(va) = \hat{b}(v)a$ einzusehen für $a \in H$ und $v \in E$, ist es wichtig zu beachten, dass wir E^* als Rechtsvektorraum auffassen. Es gilt also $\hat{b}(va)(u) = b(va, u) = \overline{a}b(v,u) = (\overline{a}\hat{b}(v))(u) = (\hat{b}(v) \cdot a)(u)$.

Definition 1.22. Wir nennen eine quaternionische Form $b : E \times E \to H$ *nicht-degeneriert*, falls die induzierte Abbildung $\hat{b} : E \to E^*$ ein Isomorphismus ist.

Aus der Gleichheit der Dimensionen von E und E^* folgt sofort, dass b nicht-degeneriert ist, sobald $\hat{b}$ injektiv oder surjektiv ist. Ein Paar (E, b), bestehend aus einem quaternionischen Vektorraum E und einer quaternionischen Form $b : E \times E \to H$, nennen wir ab sofort einfach *quaternionischer Raum*. Ist $F \subseteq E$ ein Untervektorraum, so bezeichnen wir mit $b_{|F}$ die Restriktion von b auf $F \times F$. Die Restriktion ist klarerweise eine quaternionische Form auf F.

Wie im klassischen Fall können wir, nach Wahl einer Basis für E, eine quaternionische Form durch eine Matrix beschreiben. Sei $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ eine geordnete H-Basis von E und sei $b : E \times E \to H$ eine quaternionische Form, so erhalten wir eine Matrix $B_{\mathcal{E}} = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(H)$ definiert durch $b_{ij} = b(e_i, e_j)$. Aufgrund von Eigenschaft (3) von b gilt $b_{ij} = \overline{b_{ji}}$, d.h. $B_{\mathcal{E}}^* = B_{\mathcal{E}}$. Wir nennen eine solche Matrix *hermitesch*. Sei außerdem $\phi : E \xrightarrow{\cong} H^n$ der durch die Basis $\mathcal{E}$ gegebene Isomorphismus, so gilt für alle $u, v \in E$ die Gleichung

$$b(u,v) \;=\; \phi(u)^* \, B_{\mathcal{E}} \, \phi(v).$$

Dies sieht man leicht ein, indem man u und v in der Basis $\mathcal{E}$ entwickelt. Ist umgekehrt $B \in M_n(H)$ eine hermitesche Matrix, so definiert $b(u,v) := u^* B\, v$ eine quaternionische Form auf H^n. Die Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 1.21 sind offensichtlich erfüllt, weil die Konjugation ein Antiautomorphismus ist. Die Gleichheit $b(u,v) = \overline{b(v,u)}$ folgt durch folgende Rechnung

$$\overline{b(v,u)} = b(v,u)^* = (v^* \, B \, u)^* = u^* \, B^* \, v = u^* \, B \, v.$$

Hier verwendet man Lemma 1.18 und die Voraussetzung B hermitesch. Diese Form b auf H^n, die von der hermiteschen Matrix B definiert wird, werden wir künftig mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ notieren. Ist $B = I$ die Einheitsmatrix, so nennen wir $\langle u, v\rangle_I = \langle u, v \rangle = u^* \, v$ die Standardform auf H^n. Des Weiteren stellt man leicht fest, dass die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ genau dann nicht-degeneriert ist, wenn B invertierbar ist.

2.4. Klassifikation quaternionischer Räume.

DEFINITION 1.23. Zwei quaternionische Räume (E, b) und (F, c) heißen *isometrisch*, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : E \to F$ von H-Rechtsvektorräumen gibt, sodass

$$c(\varphi(u), \varphi(v)) \;=\; b(u, v)$$

für alle $u, v \in E$ gilt.

Wir möchten nun die Gesamtheit der quaternionischen Räume klassifizieren. Das heißt, wir wollen eine Beschreibung aller Klassen isometrischer Räume geben. Dazu verfahren wir analog zur Klassifikation von symmetrischen Bilinearformen auf reellen Vektorräumen. Zunächst führen wir noch etwas Notation ein. Sei (E, b) ein quaternionischer Raum. Zwei Vektoren $u, v \in E$ mit $b(u, v) = 0$ heißen orthogonal. Ist $M \subseteq E$ eine Teilmenge, so heißt $M^\perp = \{\, u \in E \mid \forall\, v \in M\; b(v, u) = 0 \,\}$ das *orthogonale Komplement* von M. Die Menge $M^\perp$ ist immer ein Untervektorraum von E.

LEMMA 1.24. *Sei (E, b) ein quaternionischer Raum und $F \subseteq E$ ein Untervektorraum. Ist $b_{|F}$ nicht-degeneriert, so gilt*

$$E \;=\; F \,\oplus\, F^\perp.$$

Ist zusätzlich b nicht-degeneriert, so ist auch die Restriktion von b auf $F^\perp$ nicht-degeneriert.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst $F \cap F^\perp = \{0\}$. Es ist $F \cap F^\perp = \ker(\widehat{b_{|F}})$, denn

$$\ker(\widehat{b_{|F}}) = \Big\{ u \in F \mid \forall\, v \in F\; \widehat{b_{|F}}(u)(v) = 0 \Big\} = \{ u \in F \mid \forall\, v \in F\; b(u, v) = 0 \,\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist die induzierte Abbildung $\widehat{b_{|F}} : F \to F^*$ ein Isomorphismus, hat also insbesondere einen trivialen Kern. Es bleibt zu zeigen, dass $F + F^\perp = E$ ist. Sei dazu $u \in E$ beliebig und sei $\alpha = \hat{b}(u) \in E^*$. Dann ist $\alpha_{|F}$ ein Element aus dem Dualraum F^* von F. Weil nach Voraussetzung $\widehat{b_{|F}}$ surjektiv ist, gibt es ein $v \in F$ mit $\widehat{b_{|F}}(v) = \alpha_{|F}$. Besser ausgedrückt heißt das: Für alle $w \in F$ gilt die Gleichheit $b(u, w) = b(v, w)$. Damit ist $u - v$ aber im orthogonalen Komplement von F und somit $u = v \,+\, u - v \in F + F^\perp$.

Sei nun zusätzlich b nicht-degeneriert. Wir wollen zeigen, dass auch $b_{|F^\perp}$ nicht-degeneriert ist. Dazu genügt es, die Injektivität von $\widehat{b_{|F^\perp}}$ zu zeigen. Sei also u im Kern von $\widehat{b_{|F^\perp}}$, d.h. für alle $v \in F^\perp$ gilt $b(u, v) = 0$. Da aber $E = F \oplus F^\perp$ gilt, folgt sofort $b(u, v) = 0$ für alle $v \in E$. Somit ist $u \in \ker(\hat{b}) = \{0\}$. □

Ist beispielsweise (E, b) ein quaternionischer Raum und $e \in E$ mit $b(e, e) \neq 0$, so ist die Einschränkung von b auf den von e erzeugten Unterraum nicht-degeneriert. Es gilt also $E = eH \oplus (eH)^\perp$.

LEMMA 1.25. *Ist (E, b) ein quaternionischer Raum, so heißt $E_0 := E^\perp$ der* Null-Raum *von (E, b). Ist $F \subseteq E$ ein beliebiges Vektorraum-Komplement zum Null-Raum E_0, so ist $b_{|F}$ nicht-degeneriert.*

BEWEIS. Sei $u \in F$ beliebig mit $b(u, v) = 0$ für alle $v \in F$. Ist $w \in E$ beliebig, so können wir w schreiben als $w = w_0 + v$ mit $w_0 \in E_0$ und $v \in F$. Also gilt $b(u, w) = b(u, w_0) + b(u, v) = 0$ und es folgt $u \in E_0$. Wegen $F \cap E_0 = \{0\}$ folgt $u = 0$ und damit auch $b_{|F}$ nicht-degeneriert. □

LEMMA 1.26. *In jedem nicht-degenerierten quaternionischen Raum (E, b) mit Dimension ungleich 0, gibt es ein $e \in E$ mit $b(e, e) \neq 0$.*

BEWEIS. Wir wollen die Aussage indirekt beweisen und nehmen an $b(e, e) = 0$ für alle $e \in E$. Da $\dim_H E > 0$ angenommen wurde, gibt es ein $u \neq 0$ in E. Weiter ist (E, b) nicht-degeneriert, folglich gibt es ein $v \in E$ mit $b(u, v) \neq 0$. Da H ein Schiefkörper ist, können wir $b(u, v) = 1$ annehmen. Es gilt also

$$2 \;=\; b(u,v) + b(v,u) \;=\; b(u,u) + b(u,v) + b(v,u) + b(v,v) \;=\; b(u+v, u+v) \;=\; 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, da wir immer voraussetzen, dass der zugrundeliegende Körper K nicht Charakteristik 2 hat. □

SATZ 1.27. *Jeder nicht-degenerierte quaternionische Raum (E, b) besitzt eine Basis $e_1, \dots, e_n$ mit $b(e_i, e_j) = 0$ für alle $i \neq j$ und $b(e_i, e_i) \in K^\times$.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach $n = \dim_H E$. Ist $n = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also nun $n > 0$ und wir nehmen an, der Satz sei bewiesen für alle Räume mit Dimension $n - 1$. Nach Lemma 1.26 gibt es ein $e_1 \in E$ mit $b(e_1, e_1) \neq 0$. Damit ist der von e_1 erzeugte Unterraum $e_1 H$ nicht-degeneriert und wir erhalten mit Lemma 1.24 eine Zerlegung $E = e_1 H \oplus (e_1 H)^\perp$. Außerdem wissen wir, dass $F = (e_1 H)^\perp$ nicht-degeneriert ist. Nach Induktionsannahme gibt es, wegen $\dim_H F = n - 1$, eine Basis $e_2, \dots, e_n$ von F mit den gewünschten Eigenschaften. Es gilt aber auch $b(e_1, e_i) = 0$ für alle $i > 1$, weil F das orthogonale Komplement von $e_1 H$ ist. Wegen $b(e_1, e_1) = \overline{b(e_1, e_1)}$ liegt $b(e_1, e_1)$ in $K^\times$ und der Satz ist somit vollständig bewiesen. □

KOROLLAR 1.28. *Jeder quaternionische Raum (E, b) der Dimension n ist isometrisch zu einem Raum $(H^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_D)$ mit $\langle u, v\rangle_D = u^*\, D\, v$ für eine Diagonalmatrix $D \in M_n(K)$.*

BEWEIS. Wir verwenden zunächst Lemma 1.25 um $E = E_0 \oplus F$ zu schreiben, dabei ist $(F, b_{|F})$ nicht-degeneriert. Wir können nun eine Basis $f_1, \dots, f_m$ von F wählen, mit $b(f_i, f_j) = 0$ für $i \neq j$ und $b(f_i, f_i) \in K^\times$. Wir ergänzen diese Basis mit passenden Vektoren $f_{m+1}, \dots, f_n$ aus E_0 zu einer Basis von E. Der von dieser Basis gegebene Isomorphismus zu H^n liefert die Behauptung mit $D = \operatorname{diag}(b(f_1, f_1), \dots, b(f_n, f_n))$. □

Die Einträge der Diagonalmatrix D sind nicht eindeutig. Zum einen kann man durch Permutation der Basis die Reihenfolge der Einträge ändern. Zum anderen kann man die Basisvektoren mit Skalaren aus H variieren. Genauer: Ist $x \in H$ und $e \in E$, so ist $b(ex, ex) = \overline{x}\, b(e, e)\, x = \mathfrak{n}(x) b(e, e)$. Also können wir die Einträge auf der Diagonalen aus einem beliebigen Representantensystem von $K^\times/\mathfrak{n}(H^\times)$ wählen.

KOROLLAR 1.29. *Ist H eine Quaternionenalgebra mit $\mathfrak{n}(H) = K$, so gibt es für jedes $d \in \mathbb{N}$ bis auf Isomorphie genau einen nicht-degenerierten quaternionischen Raum (E, b) der Dimension d über H.*

Insbesondere gilt dies für Quaternionenalgebren über $\mathbb{Q}$, welche über $\mathbb{R}$ zerfallen.

BEWEIS. Man wählt nun im vorangehenden Korollar die Basisvektoren $e_1, \dots, e_d$ so, dass $b(e_i, e_i) = 1$ gilt. Dann sieht man, dass (E, b) isometrisch zu H^d mit der Standardform $\langle u, v\rangle = u^*\, v$ ist.

Sei H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, welche über $\mathbb{R}$ zerfällt. Der Normensatz (Theorem 1.14) impliziert, dass die Voraussetzung $\mathfrak{n}(H) = \mathbb{Q}$ erfüllt ist. □

Es ist sofort klar, dass der Normensatz auch in anderen Fällen sehr nützlich ist. Ist beispielsweise H eine Quaternionenalgebra über einem Zahlkörper K ohne reelle Einbettungen, so ist die Voraussetzung $\mathfrak{n}(H) = K$ ebenfalls direkt erfüllt.

BEMERKUNG 1.30. Sei H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, welche über $\mathbb{R}$ verzweigt. Wir wollen diese Situation nun etwas genauer untersuchen. In diesem Fall gilt laut Normensatz $\mathfrak{n}(H) = \mathbb{Q}^+$. Wie oben sehen wir, dass jeder nicht-degenerierte quaternionische Raum (E, b) zu einem der Räume $(H^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_{I_{p,q}})$ isometrisch ist. Hier bezeichnet $I_{p,q}$ die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q})$ mit $p+q = m = \dim_H E$.

Wir müssen allerdings noch die Frage klären, ob diese Formen wirklich nicht isometrisch sind für verschiedene p und q. Wir werden dazu einfach den Beweis des Sylvester'schen Trägheitssatzes für den Fall quaternionischer Formen übertragen. Wir orientieren uns dabei an Greubs Darstellung [**2**].

2.5. Definite und Semidefinite Formen. Es sei im ganzen Abschnitt H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, welche über $\mathbb{R}$ verzweigt. Insbesondere nimmt die reduzierte Norm auf H nur positive Werte an. Beachte außerdem, dass jede quaternionische Form auf der Diagonalen nur Werte in $\mathbb{Q}$ annimmt.

DEFINITION 1.31. Ein quaternionischer Raum (E, b) heißt *positiv semidefinit*, falls für alle $v \in E$

$$b(v, v) \geq 0$$

gilt. Er heißt *positiv definit*, falls zusätzlich gilt: $b(v, v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$. Der Raum (E, b) heißt *negativ (semi-)definit*, falls $(E, -b)$ positiv (semi-)definit ist.

Wir können nun eine ganze Reihe klassischer Resultate ohne weiteres für unsere Zwecke übersetzen.

LEMMA 1.32 (Cauchy-Schwarz Ungleichung). *Ist (E, b) positiv semidefinit, so gilt für alle $u, v \in E$*

$$\mathfrak{n}(b(u, v)) \;\leq\; b(u, u)b(v, v).$$

BEWEIS. Für alle $x \in H$ gilt

$$0 \;\leq\; b(u + vx, u + vx) \;=\; b(u, u) + \mathfrak{n}(x)b(v, v) + \overline{x}b(v, u) + b(u, v)x. \tag{2.1}$$

Falls $b(u, u) = b(v, v) = 0$ gilt, wähle $x = -b(v, u) = -\overline{b(u, v)}$. Dann wird Ungleichung 2.1 zu $0 \;\leq\; -2\mathfrak{n}(b(u, v))$. Man kann nun schließen, dass $\mathfrak{n}(b(u, v)) = 0$ sein muss und die Behauptung stimmt. Ist $b(u, u)$ oder $b(v, v)$ ungleich Null, so dürfen wir o.B.d.A. $b(v, v) \neq 0$ annehmen. Setzen wir nun $x = -b(v, u)b(v, v)^{-1}$ in 2.1 ein, so erhalten wir

$$0 \;\leq\; b(u, u) + \mathfrak{n}(b(v, u))b(v, v)^{-1} - 2\mathfrak{n}(b(v, u))b(v, v)^{-1}.$$

Jetzt multiplizieren wir mit der positiven rationalen Zahl $b(v, v)$ und bringen $\mathfrak{n}(b(v, u))$ auf die andere Seite. $\square$

Das selbe Resultat gilt offensichtlich auch für negativ semidefinite Räume.

BEMERKUNG 1.33. Ist ein Raum (E, b) positiv (oder negativ) definit, so ist er nicht-degeneriert, denn $b(x, x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ in E.

Satz 1.34. *Sei H eine $\mathbb{Q}$-Quaternionenalgebra, die über $\mathbb{R}$ verzweigt. Ist (E, b) ein quaternionischer Raum über H, so gibt es eine Zerlegung*

$$E \;=\; E_0 \,\oplus\, E_+ \,\oplus\, E_-.$$

wobei E_+ mit der Einschränkung von b positiv und E_- negativ definit ist. Außerdem bezeichnet E_0 den Null-Raum von (E, b).

Weiter gilt: Die Dimensionen von E_+ und E_- sind eindeutig durch b festgelegt.

Beweis. Um die Existenz einer solchen Zerlegung zu zeigen, können wir, wegen Lemma 1.25, (E, b) als nicht-degeneriert annehmen. Sei E_+ ein (beliebiger) maximaler positiv definiter Teilraum von E. Dieser ist nicht-degeneriert und wir definieren $E_- = E_+^{\perp}$. Durch Lemma 1.24 sehen wir, dass $E = E_+ \oplus E_-$ gilt und E_- ebenfalls nicht-degeneriert ist. Wir zeigen nun, dass E_- wirklich negativ definit ist. Sei $v \in E_-$ beliebig gewählt, so gilt $b(v, v) \leq 0$. Denn wäre $b(v, v) > 0$, könnten wir mit $vH + E_+$ einen echt größeren positiv definiten Teilraum von E wählen. Dies widerspricht der Wahl von E_+. Wir schließen also, dass E_- negativ semidefinit ist. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung sehen wir, dass E_- sogar negativ definit ist. Sei dazu $v \in E_-$ mit $b(v, v) = 0$. Es gilt nun

$$0 \;\leq\; \mathfrak{n}(b(v, u)) \;\leq\; b(v, v)b(u, u) \;=\; 0$$

und damit $b(v, u) = 0$ für alle $u \in E_-$. Da E_- nicht-degeneriert ist, muss $v = 0$ sein. Damit ist E_- negativ definit.

Kommen wir nun zur Eindeutigkeit der Dimensionen von E_+ und E_-. Betrachten wir dazu zwei Zerlegungen von E

$$E \;=\; E_0 \,\oplus\, E_+^1 \,\oplus\, E_-^1 \;=\; E_0 \,\oplus\, E_+^2 \,\oplus\, E_-^2.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \dim_H E \;&=\; \dim_H E_0 + \dim_H E_+^1 + \dim_H E_-^1 \\ &=\; \dim_H E_0 + \dim_H E_+^2 + \dim_H E_-^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Der Schnitt von E_+^1 mit $E_-^2 \oplus E_0$ muss trivial sein. Also gilt

$$\dim_H E_+^1 + \dim_H E_-^2 + \dim_H E_0 \;\leq\; \dim_H E$$

Damit erhält man $\dim_H E_+^1 \leq \dim_H E_+^2$ und durch vertauschen der Rollen folgt

$$\dim_H E_+^1 \;=\; \dim_H E_+^2.$$

Mit 2.2 folgt sofort die Gleichheit der Dimensionen von E_-^1 und E_-^2. □

Definition 1.35. Ist (E, b) ein quaternionischer Raum, so heißt das eindeutige Tripel $\mathrm{sig}(b) = (\dim_H E_+, \dim_H E_-, \dim_H E_0)$ die *Signatur* von (E, b). Ist E nicht-degeneriert, so ist $\dim_H E_0 = 0$ und wir verwenden die kurze Notation

$$\mathrm{sig}(b) \;=\; (\dim_H E_+, \dim_H E_-).$$

Isometrische quaternionische Räume haben die selbe Signatur, denn eine Isometrie erhält positiv (bzw. negativ) definite Teilräume.

Korollar 1.36. *Sei H eine $\mathbb{Q}$-Quaternionenalgebra, die über $\mathbb{R}$ verzweigt und sei (E, b) ein nicht-degenerierter quaternionischer Raum der Dimension m. Dann gibt es eindeutige natürliche Zahlen p und q mit $p + q = n$, sodass (E, b) isometrisch zu $(H^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_{I_{p,q}})$ ist.*

Beweis. Wie in Bemerkung 1.30 sehen wir, dass E zu einem Raum $(H^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{I_{p,q}})$ isometrisch ist. Die Eindeutigkeit von p und q leitet sich aus Satz 1.34 ab, da $\mathrm{sig}(b) = \mathrm{sig}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{I_{p,q}}) = (p, q)$ gilt. □

3. Interpretation durch nicht-abelsche Galoiskohomologie

Wir wollen die eben gefundenen Ergebnisse nun in Termen nicht-abelscher Galoiskohomologie interpretieren. Eine kurze Einführung findet der Leser in Appendix A. Für eine detaillierte Erklärung sei auf Serres *Cohomologie Galoisienne* [**11**] verwiesen.

Sei K ein Körper ($\mathrm{char}(K) \neq 2$) und H eine Quaternionen-Divisionsalgebra über K. Wir betrachten die zentrale einfache K-Algebra $M_n(H)$. Die reduzierte Norm auf $M_n(H)$ notieren wir mit $\mathsf{nrd} : M_n(H) \to K$ (siehe Abschnitt 2.2). Uns interessiert nun die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(H) \ := \ \{ \, x \in M_n(H) \mid \mathsf{nrd}(x) = 1 \, \}$$

über H. Diese ist eine normale Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}_n(H)$. Auf $\mathrm{GL}_n(H)$ definieren wir eine Involution[3] $\tau : \mathrm{GL}_n(H) \to \mathrm{GL}_n(H)$, gegeben durch

$$\tau(A) \ := \ {}^{\tau}\!A \ := \ (A^*)^{-1} \ = \ (A^{-1})^*.$$

Man prüft leicht nach, dass τ ein Automorphismus ist:

$${}^{\tau}(AB) = ((AB)^*)^{-1} = (B^*A^*)^{-1} = {}^{\tau}\!A \, {}^{\tau}\!B.$$

Auch ${}^{\tau}({}^{\tau}\!A) = A$ ist offensichtlich. Weiter sieht man mit Lemma 1.19, dass sich τ zu einer Involution auf $\mathrm{SL}_n(H)$ einschränkt. Mittels τ erhalten wir also eine Wirkung der zweielementigen Gruppe $\mathfrak{c}_2 = \{1, \tau\}$ auf $\mathrm{SL}_n(H)$, die auch verträglich mit der Multiplikation ist. Wir bezeichnen $\mathrm{SL}_n(H)$ mit dieser Wirkung gelegentlich als $\mathfrak{c}_2$-Gruppe. In dieser speziellen Situation ist ein *Kozykel* mit Werten in $\mathrm{SL}_n(H)$ gegeben durch ein Paar $(1, \eta)$ mit $\eta \in \mathrm{SL}_n(H)$, sodass gilt

$$\eta \, {}^{\tau}\!\eta = 1.$$

Hier bezeichnet $1 = 1_n$ immer das neutrale Element (d.h. die Einheitsmatrix) in $\mathrm{SL}_n(H)$. Durch Multiplikation mit η^* sehen wir, dass diese Bedingung zu $\eta = \eta^*$ äquivalent ist. In diesem Fall ist somit ein Kozykel gegeben durch eine hermitesche Matrix $\eta \in SL_n(H)$. Zwei Kozykel $(1, \eta)$ und $(1, \gamma)$ heißen *kohomolog*, falls ein $b \in \mathrm{SL}_n(H)$ existiert mit

$$\gamma \ = \ b^{-1} \eta \, {}^{\tau}\!b \ = \ b^{-1} \eta (b^{-1})^*. \tag{3.1}$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kozykel. Die Klasse des Kozykels $(1, \eta)$ bezeichnen wir mit $[1, \eta]$. Die Menge der Äquivalenzklassen von Kozykeln bezeichnen wir mit $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$. Diese Menge heißt die *erste Kohomologiemenge* von $\mathfrak{c}_2$ mit Werten in $\mathrm{SL}_n(H)$. Wir betrachten diese als punktierte Menge mit ausgezeichnetem Element $[1, 1]$. Ganz analog definiert man $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H))$, die erste Kohomologiemenge mit Werten in $\mathrm{GL}_n(H)$.

Ohne dies zu merken, haben wir in den vorangegangenen Abschnitten zu quaternionischen Formen die Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H))$ bestimmt. In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, dass hermitesche Matrizen in $\mathrm{GL}_n(H)$ genau den nicht-degenerierten quaternionischen Formen auf H^n entsprechen. Nun haben wir gerade festgestellt, dass hermitesche Matrizen in $\mathrm{GL}_n(H)$ nichts anderes sind als Kozykel für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H))$. Grob gesprochen: Kozykel sind quaternionische Formen auf dem H^n. Weiter sind zwei Kozykel kohomolog genau dann, wenn die entsprechenden Formen isometrisch sind.

[3]Involution bedeutet hier: Automorphismus der Ordnung 2.

Proposition 1.37. *Sei H eine Quaternionen-Divisionsalgebra über K mit $\mathfrak{n}(H) = K$, so besteht die erste Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H))$ aus einem Element:*

$$H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H)) \;=\; \{\, [1,1] \,\}.$$

Beweis. Dies folgt nun direkt aus Korollar 1.29. □

Proposition 1.38. *Sei H eine Quaternionen-Divisionsalgebra über $\mathbb{Q}$, die über $\mathbb{R}$ verzweigt, dann ist die erste Kohomologiemenge gegeben durch*

$$H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H)) \;=\; \{\, [1, I_{p,q}] \mid p+q=n \,\}.$$

Beweis. Auch diese Aussage folgt direkt aus Korollar 1.36. □

Korollar 1.39. *Sei H eine Quaternionen-Divisionsalgebra über $\mathbb{Q}$, die über $\mathbb{R}$ verzweigt, dann gilt*

$$H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H)) \;=\; \{\, [1, I_{p,q}] \mid p+q=n \,\}.$$

Beweis. Man beachte zunächst, dass wegen Lemma 1.19 die Matrizen $I_{p,q}$ immer in $SL_n(H)$ liegen. Ist $X \in \mathrm{SL}_n(H)$ eine hermitesche Matrix, so gibt es nach vorangegangener Proposition ein $A \in \mathrm{GL}_n(H)$ mit $A^*XA = I_{p,q}$ für gewisse natürliche Zahlen p und q mit $p+q=n$. Nehmen wir die reduzierte Norm auf beiden Seiten der Gleichung, so erhalten wir $\mathsf{nrd}(A)^2 = 1$. Da H über $\mathbb{R}$ verzweigt, nimmt die reduzierte Norm laut Normensatz nur positive Werte an. Es folgt somit $\mathsf{nrd}(A) = 1$ und damit auch $A \in \mathrm{SL}_n(H)$. □

Man möchte natürlich gerne auch für den Fall $\mathfrak{n}(H) = K$ aus Proposition 1.37 die erste Kohomologiemenge von $\mathfrak{c}_2$ mit Werten in $\mathrm{SL}_n(H)$ angeben. Hier muss man etwas vorsichtiger vorgehen. Wegen $\mathfrak{n}(H) = K$ erhält man eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_n(H) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(H) \xrightarrow{\mathsf{nrd}} K^\times \longrightarrow 1.$$

Diese induziert eine exakte Sequenz punktierter Mengen (siehe Lemma A.6 oder [**11**, I-66,Prop. 38])

$$1 \to \mathrm{SL}_n(H)^{\mathfrak{c}_2} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(H)^{\mathfrak{c}_2} \longrightarrow (K^\times)^{\mathfrak{c}_2} \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H)) \xrightarrow{\iota_*} H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H))$$

Hier notiert $G^{\mathfrak{c}_2}$ für eine der vorkommenden Gruppen G die Menge der Fixpunkte der Wirkung von $\mathfrak{c}_2$ auf G. Wegen $\mathsf{nrd}({}^{\tau}A) = \mathsf{nrd}(A)^{-1}$, ist die induzierte Wirkung der zweielementigen Gruppe $\mathfrak{c}_2$ auf $K^\times$ durch die Inversion gegeben. Das heißt, es gilt ${}^{\tau}x := x^{-1}$ für alle $x \in K^\times$. Die Fixpunkte dieser Wirkung auf $K^\times$ sind damit also 1 und -1. Nach Proposition 1.37 besteht die Menge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_n(H))$ aus einem Element. Die betrachtete Sequenz nimmt also eine einfach Form an:

$$1 \to \mathrm{SL}_n(H)^{\mathfrak{c}_2} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(H)^{\mathfrak{c}_2} \xrightarrow{\mathsf{nrd}} \{\pm 1\} \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H)) \xrightarrow{\iota_*} 1 \tag{3.2}$$

Damit erhält man folgendes

Korollar 1.40. *Ist H eine Quaternionen-Divisionsalgebra mit $\mathfrak{n}(H) = K$, so besteht $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ aus einem oder zwei Elementen. Genauer gilt: $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ ist einelementig genau dann, wenn ein $A \in GL_n(H)$ existiert mit $A^*A = 1_n$ und $\mathsf{nrd}(A) = -1$.*

Beweis. Wir schließen aus der exakten Sequenz 3.2, dass ι_* trivial und die Abbildung δ surjektiv ist. Folglich besteht $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ aus einem oder zwei Elementen. Weiter sieht man: $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ besteht aus einem Element genau dann, wenn -1 im Kern von δ liegt. Wegen der Exaktheit ist dies äquivalent dazu, dass -1 im Bild der reduzierten Norm (eingeschränkt auf $\mathrm{GL}_n(H)^{\mathfrak{c}_2}$) liegt. Man bemerkt nun $\mathrm{GL}_n(H)^{\mathfrak{c}_2} = \{ A \in \mathrm{GL}_n(H) \mid A^*A = 1 \}$ und kann damit die Behauptung einsehen. □

3.1. Kohomologie mit Werten in der $\mathrm{SL}_2(H)$. Wir werden uns nun auf den Fall $n = 2$ einschränken und die nicht-abelsche Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(H))$ (für Quaternionenalgebren H mit $\mathfrak{n}(H) = K$) bestimmen. Dazu wollen wir für *hermitesche* Matrizen in $M_2(H)$ den Begriff der Determinante einführen.

Definition 1.41. Sei $A = \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in K$ und $z \in H$ eine hermitesche Matrix, so definieren wir die *Determinante* von A durch $\det(A) := xy - \mathfrak{n}(z) \in K$.

Offensichtlich verwenden wir hier die gewöhnliche Formel für die Determinante von 2×2-Matrizen. Die Nichtkommutativität von H macht hierbei keine Probleme, weil sowohl x und y, als auch z und $\overline{z}$ vertauschen.

Bemerkung 1.42. Die Determinante von hermiteschen Matrizen ist in gewisser Weise „feiner" als die reduzierte Norm. Es gilt für hermitesches $A \in M_2(H)$ die Identität $\mathsf{nrd}(A) = \det(A)^2$. Dies folgt mit der expliziten Normformel aus Lemma 1.20: Ist $A = \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in K$ und $z \in H$, dann sieht man direkt

$$\mathsf{nrd}(A) = \mathfrak{n}(x)\mathfrak{n}(y) + \mathfrak{n}(z)\mathfrak{n}(z) - t(\overline{z}xzy) = x^2y^2 + \mathfrak{n}(z)^2 - 2xy\mathfrak{n}(z) = \det(A)^2.$$

Folgendes rechenlastiges Lemma liefert einen weiteren interessanten Zusammenhang zwischen reduzierter Norm und Determinante.

Lemma 1.43. *Ist $A \in M_2(H)$ hermitesch und $X \in M_2(H)$ beliebig, so gilt*

$$\det(X^*AX) = \mathsf{nrd}(X)\det(A)$$

Beweis. Sei $A = \begin{pmatrix} x & z \\ \overline{z} & y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in K$ und $z \in H$, weiter sei $X = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ mit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$. Eine einfache Rechnung ergibt:

$$X^*AX = \begin{pmatrix} x\mathfrak{n}(u_1) + t(\overline{u_1}zu_2) + y\mathfrak{n}(u_2) & x\overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}\,\overline{z}v_1 + \overline{u_1}zv_2 + y\overline{u_2}v_2 \\ x\overline{v_1}u_1 + \overline{v_2}\,\overline{z}u_1 + \overline{v_1}zu_2 + y\overline{v_2}u_2 & x\mathfrak{n}(v_1) + t(\overline{v_1}zv_2) + y\mathfrak{n}(v_2) \end{pmatrix}$$

Nun werden wir versuchen die Determinante zu bestimmen. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} D_1 &:= \big(x\mathfrak{n}(u_1) + t(\overline{u_1}zu_2) + y\mathfrak{n}(u_2)\big)\big(x\mathfrak{n}(v_1) + t(\overline{v_1}zv_2) + y\mathfrak{n}(v_2)\big) \\ &= x^2\mathfrak{n}(u_1v_1) + x\mathfrak{n}(u_1)t(\overline{v_1}zv_2) + xy\mathfrak{n}(u_1v_2) \\ &\quad + x\mathfrak{n}(v_1)t(\overline{u_1}zu_2) + t(\overline{u_1}zu_2)t(\overline{v_1}zv_2) + y\mathfrak{n}(v_2)t(\overline{u_1}zu_2) \\ &\quad + xy\mathfrak{n}(u_2v_1) + y\mathfrak{n}(u_2)t(\overline{v_1}zv_2) + y^2\mathfrak{n}(u_2v_2) \end{aligned}$$

und vergleichen dies mit

$$\begin{aligned} D_2 &:= \mathfrak{n}(x\overline{v_1}u_1 + \overline{v_2}\,\overline{z}u_1 + \overline{v_1}zu_2 + y\overline{v_2}u_2) \\ &= x^2\mathfrak{n}(v_1u_1) + \mathfrak{n}(z)(\mathfrak{n}(v_2u_1) + \mathfrak{n}(v_1u_2)) + y^2\mathfrak{n}(v_2u_2) \\ &\quad + x\mathfrak{n}(u_1)t(\overline{v_1}zv_2) + x\mathfrak{n}(v_1)t(\overline{u_2}\,\overline{z}u_1) + xyt(\overline{v_1}u_1\overline{u_2}v_2) \\ &\quad + t(\overline{v_2}\,\overline{z}u_1\overline{u_2}\,\overline{z}v_1) + y\mathfrak{n}(v_2)t(\overline{u_2}\,\overline{z}u_1) + y\mathfrak{n}(u_2)t(\overline{v_1}zv_2). \end{aligned}$$

Hierbei verwenden wir mehrmals die nützliche Gleichung $t(uv) = t(vu)$ für alle u, v in H. Jetzt können wir die Determinante von X^*AX bestimmen. Es gilt $\det(X^*AX) = D_1 - D_2$ und man stellt sofort fest, dass sich viele Terme kürzen. Man erhält unter Verwendung der expliziten Normformel (Lemma 1.20) das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}
\det(X^*AX) &= (xy - \mathfrak{n}(z))(\mathfrak{n}(u_1v_2) + \mathfrak{n}(v_1u_2)) - xyt(\overline{v_1}u_1\overline{u_2}v_2) \\
&\quad + t(\overline{u_1}zu_2)t(\overline{v_1}zv_2) - t(\overline{v_2}\,\overline{z}u_1\overline{u_2}\,\overline{z}v_1) \\
&= xy\,\mathsf{nrd}(X) - \mathfrak{n}(z)(\mathfrak{n}(u_1v_2) + \mathfrak{n}(v_1u_2)) \\
&\quad + t(\overline{v_2}\,\overline{z}t(\overline{u_1}zu_2)v_1) - t(\overline{v_2}\,\overline{z}u_1\overline{u_2}\,\overline{z}v_1) \\
&= xy\,\mathsf{nrd}(X) - \mathfrak{n}(z)(\mathfrak{n}(u_1v_2) + \mathfrak{n}(v_1u_2)) \\
&\quad + t\big(\overline{v_2}\,\overline{z}(t(u_1\overline{u_2}\,\overline{z}) - u_1\overline{u_2}\,\overline{z})v_1\big) \\
&= xy\,\mathsf{nrd}(X) - \mathfrak{n}(z)(\mathfrak{n}(u_1v_2) + \mathfrak{n}(v_1u_2)) + t\big(\overline{v_2}\,\overline{z}(zu_2\overline{u_1})v_1\big) \\
&= (xy - \mathfrak{n}(z))\,\mathsf{nrd}(X)
\end{aligned}$$

□

Diese einfachen Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen Determinante und reduzierter Norm genügen, um die erste Kohomologie von $\mathfrak{c}_2$ mit Werten in $\mathrm{SL}_2(H)$ zu bestimmen.

PROPOSITION 1.44. *Sei H eine Quaternionen-Divisionsalgebra mit $\mathfrak{n}(H) = K$. Es gilt*

$$H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(H)) \;=\; \{\,[1,1],\ [1, I_{1,1}]\,\}$$

BEWEIS. Durch Korollar 1.40 wissen wir, dass $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(H))$ aus höchstens zwei Elementen besteht. Wir müssen uns noch überlegen, warum die zwei Kozykel $(1,1)$ und $(1, I_{1,1})$ nicht kohomolog sind als Kozykel mit Werten in der SL_2. Wegen $\det(1_2) = 1$ und $\det(I_{1,1}) = -1$ folgt dies jedoch sofort aus Lemma 1.43. □

BEMERKUNG 1.45. Es scheint naheliegend, dass für allgemeines n die erste Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ ebenfalls aus zwei Elementen besteht. Das nützliche Argument mit der Determinante lässt sich aber nicht auf offensichtliche Weise verallgemeinern, weshalb eine andere Methode zur Beantwortung dieser Frage gefunden werden muss. Im Fall $K = \mathbb{Q}$ werden wir später sehen, dass diese Vermutung für jedes n stimmt (siehe Kapitel 3 Abschnitt 3).

KAPITEL 2

Ordnungen

In diesem Kapitel wollen wir Ordnungen in Quaternionenalgebren über $\mathbb{Q}$ studieren. Dazu werden wir zunächst wichtige Begriffe einführen. Im Weiteren soll dann die nichtabelsche Kohomologie der $\mathfrak{c}_2$ mit Werten in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ für Ordnungen $\mathcal{O}$ bestimmt werden.

1. Grundlegendes

Sei im Folgenden immer $H = Q(a,b|\mathbb{Q})$ eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$. Wir nehmen immer an H sei eine Divisionsalgebra.

Definition 2.1. Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ein *$\mathbb{Z}$-Gitter* Λ in V ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Untermodul von V. Das Gitter Λ heißt *vollständig*, falls Λ eine Basis von V als $\mathbb{Q}$-Vektorraum enthält, d.h. $\mathbb{Q}\Lambda = V$.

Definition 2.2. Eine *$\mathbb{Z}$-Ordnung* $\mathcal{O} \subseteq H$ ist ein vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter in H, welches auch ein Unterring[1] von H ist.

Ordnungen in endlich dimensionalen Algebren über $\mathbb{Q}$ sind eine Verallgemeinerung des „Ringes der ganzen Zahlen“ in algebraischen Zahlkörpern. Es handelt sich um Ringe die aus „ganzen Elementen“ bestehen. Wir werden dies kurz (im Fall von Quaternionenalgebren) genauer erläutern.

Definition 2.3. Ein Element $x \in H$ heißt *ganz* (über $\mathbb{Z}$), falls ein normiertes Polynom $f \neq 0 \in \mathbb{Z}[X]$ existiert, sodass gilt: $f(x) = 0$.

Es gilt bekanntlich: $x \in H$ ist ganz genau dann, wenn der Ring $\mathbb{Z}[x]$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist. Dies findet man z.B. bei Jantzen, Schwermer [**4**, S.351]. Wir können dieses Ergebnis aus dem kommutativen Fall verwenden, denn für festes $x \in H$ berühren beide Aussagen nur den (kommutativen!) Teilkörper $\mathbb{Q}(x) \subset H$. Oder anders ausgedrückt: $x \in H$ ist ganz genau dann, wenn x ganz ist als Element von $\mathbb{Q}(x)$. Im Gegensatz zum kommutativen Fall sind Summen und Produkte von ganzen Elementen im Allgemeinen nicht ganz. Das heißt, die Menge der ganzen Elemente von H bildet i.A. keinen Ring. Bei Vignéras [**14**, S.19] findet sich ein nützliches Kriterium für die Ganzheit eines Elementes einer Quaternionenalgebra.

Lemma 2.4. *Ein Element $x \in H$ ist genau dann ganz, wenn seine reduzierte Norm $\mathfrak{n}(x)$ und Spur $t(x)$ in $\mathbb{Z}$ liegen.*

Beweis. Es seien zunächst $\mathfrak{n}(x)$ und $t(x)$ ganze Zahlen. Setzen wir $f(X) := X^2 - t(x)X + \mathfrak{n}(x)$, so ist f ein normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ mit $f(x) = 0$.

Umgekehrt sei nun $x \in H$ ein ganzes Element. Es gibt ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(x) = 0$ aber $f \neq 0$. Dann ist aber auch $\overline{x}$ ganz, denn $f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = 0$. Da x und $\overline{x}$ vertauschen, können wir wie im kommutativen Fall zeigen, dass $x\overline{x} = \mathfrak{n}(x)$

[1] Als Unterringe bezeichnen wir additive Untergruppen, die unter Multiplikation abgeschlossen sind und welche auch die 1 enthalten.

und $x+\overline{x}=t(x)$ ganz sind. Da reduzierte Norm und Spur aber in $\mathbb{Q}$ liegen und $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen ist, erhalten wir $\mathfrak{n}(x)\in\mathbb{Z}$ und $t(x)\in\mathbb{Z}$. □

Den folgenden Satz findet man sowohl bei Reiner [**7**, Thm. 10.3,S.126], als auch bei Vignéras [**14**, Prop.4.2, S.20].

Satz 2.5. *Sei $\mathcal{O}$ ein Unterring der Quaternionenalgebra H. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$\mathcal{O}$ ist eine Ordnung, d.h. vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter.*
(2) *$\mathcal{O}$ besteht aus ganzen Elementen und $\mathbb{Q}\mathcal{O}=H$.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2):
Die Eigenschaft $\mathbb{Q}\mathcal{O}=H$ ist sofort klar, weil $\mathcal{O}$ ein *vollständiges* Gitter ist. Sei nun $x\in\mathcal{O}$ beliebig, wir müssen zeigen, dass x ganz ist. Der Ring $\mathbb{Z}[x]$ liegt aber auf natürliche Weise in $\mathcal{O}$, weil dies ein Unterring und $\mathbb{Z}$-Modul ist. Da $\mathbb{Z}$ sicherlich ein noetherscher Ring ist und $\mathcal{O}$ nach Voraussetzung ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, muss auch der Untermodul $\mathbb{Z}[x]$ endlich erzeugt sein. Wie wir oben bemerkt haben, folgt dadurch die Ganzheit von x.
(2) $\Longrightarrow$ (1):
Zunächst bemerken wir, dass $\mathcal{O}$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von H ist, denn $\mathcal{O}$ ist ein Unterring, enthält also 1 und damit auch $\mathbb{Z}$. Wir müssen also zeigen, dass es sich um einen endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul handelt. Wegen $\mathbb{Q}\mathcal{O}=H$ gibt es eine $\mathbb{Q}$ Basis $v_1,\ldots,v_4$ von H mit Elementen aus $\mathcal{O}$. Aus Lemma 1.9 wissen wir, dass die Spurform $(x,y)\mapsto t(xy)$ auf H nicht-degeneriert ist. Es gibt also eine zu $v_1,\ldots,v_4$ duale $\mathbb{Q}$-Basis in H, d.h. es gibt eine $\mathbb{Q}$-Basis $w_1,\ldots,w_4$ von H mit $t(w_kv_l)=\delta_{kl}$. Sei nun $x\in\mathcal{O}$ beliebig. Wir entwickeln x in der Basis $w_1,\ldots,w_4$ und stellen fest: $x=\sum_{k=1}^4 t(xv_k)w_k$. Da x und v_k für $k=1,\ldots,4$ in dem Ring $\mathcal{O}$ liegen, folgern wir $xv_k\in\mathcal{O}$. Nach Voraussetzung handelt es sich um ganze Elemente und nach Lemma 2.4 liegen die Koeffizienten $t(xv_k)$ in $\mathbb{Z}$. Wir sehen nun, dass $\mathcal{O}$ als Untermodul des noetherschen Moduls $\sum_{k=1}^4\mathbb{Z}w_k$ endlich erzeugt ist. Klarerweise ist $\mathcal{O}$ vollständiges Gitter, wegen $\mathbb{Q}\mathcal{O}=H$. □

Bemerkung 2.6. Mit der gefundenen zweiten Beschreibung von Ordnungen sieht man leicht ein, dass es maximale Ordnungen gibt[2]. Weiter sieht man, dass jede Ordnung in einer maximalen Ordnung enthalten ist.

Bemerkung 2.7. Jede Ordnung einer Quaternionenalgebra ist invariant unter Konjugation. Dies sieht man wie folgt: Sei $x\in\mathcal{O}$, so ist $\overline{x}=t(x)-x$. Es gilt aber $t(x)\in\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}\subset\mathcal{O}$, also liegt auch $\overline{x}$ in der Ordnung $\mathcal{O}$.

Wir schließen aus dem gerade bewiesenen Satz, dass die reduzierte Norm und Spur der Quaternionenalgebra H, für jede Ordnung $\mathcal{O}\subset H$, Abbildungen von $\mathcal{O}$ in die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ liefern. Wegen der bekannten Linearität der Spur, ist diese sogar ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $t:\mathcal{O}\to\mathbb{Z}$. Das Bild $t(\mathcal{O})$ einer Ordnung $\mathcal{O}$ unter der Spur ist somit ein Ideal. Wegen $1\in\mathcal{O}$ und $t(1)=2$ sieht man: Für jede Ordnung $\mathcal{O}\subset H$ ist das Bild unter der Spur entweder $\mathbb{Z}$ oder $2\mathbb{Z}$.

Beispiel 2.8. Wir wollen an einem einfachen Beispiel die eingeführten Begriffe erläutern. Betrachten wir dazu die Quaternionenalgebra $H:=Q(-1,-1|\mathbb{Q})$. Wie man mit Proposition 1.6 leicht sieht, ist H eine Divisionsalgebra. Wir suchen nun $\mathbb{Z}$-Ordnungen in H. Ein Beispiel, das man sofort findet, ist $\mathcal{O}_1=\mathbb{Z}[1,i,j,ij]$. Hier bezeichnen wir

[2]Wobei man hier auf Zorn's Lemma zurückgreifen kann.

durch $\mathbb{Z}[1,i,j,ij]$ den kleinsten Unterring von H, welcher sowohl $\mathbb{Z}$ als auch 1, i, j, ij enthält. Wir führen hier die „überflüssigen“ Elemente 1 und ij in der Hoffnung auf, dass dann die Identität $\mathbb{Z}[1,i,j,ij] = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}j+\mathbb{Z}ij$ schneller ins Auge springt. Damit ist $\mathcal{O}_1$ per definitionem ein Unterring von H und er enthält eine $\mathbb{Q}$-Basis, nämlich $1,i,j,ij$. Die Tatsache, dass $\mathcal{O}_1$ nur aus ganzen Elementen besteht, sieht man mit Lemma 2.4 ebenfalls sehr leicht ein. Wir haben also eine Ordnung in H gefunden. Es gilt übrigens $t(\mathcal{O}_1) = 2\mathbb{Z}$. Wir können sogar das Bild unter der Normabbildung bestimmen: Die Menge $\mathfrak{n}(\mathcal{O}_1)$ besteht aus allen nicht-negativen ganzen Zahlen. Dies folgt aus Lagranges Satz, wonach jede positive ganze Zahl Summe von vier Quadraten ist. Die Ordnung $\mathcal{O}_1$ ist *keine* maximale Ordnung, wie wir gleich sehen werden.

Man findet leicht eine größere Ordnung $\mathcal{O}_2$, welche $\mathcal{O}_1$ enthält. Wir setzen $\mathcal{O}_2 := \mathbb{Z}[1,i,j,\omega]$ mit $\omega = \frac{1}{2}(1+i+j+ij)$ und werden nun zeigen, dass es sich dabei um eine Ordnung handelt. $\mathcal{O}_2$ ist ein Unterring von H und er enthält die $\mathbb{Q}$-Basis $1,i,j,\omega$ von H. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\mathcal{O}_2$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist. Dazu betrachten wir das vollständige $\mathbb{Z}$-Gitter $M = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}j+\mathbb{Z}\omega$ in H. Wir wollen $M = \mathcal{O}_2$ zeigen. Da die Elemente $1,i,j,\omega$ in M liegen und $M \subseteq \mathcal{O}_2$ gilt, ist es ausreichend zu zeigen, dass M selbst ein Unterring ist, d.h. wir müssen die Abgeschlossenheit von M unter der Multiplikation nachprüfen. Unter Verwendung der Distributivität genügt es, dies für alle Produkte der Elemente i,j und ω zu testen. Es sind $i^2 = -1 = j^2$ und $ji = -ij$ in M. Weiter sieht man durch Rechnung $\omega^2 = \omega - 1$, $i\omega = \omega - 1 - j$, $j\omega = \omega - 1 - ij = \omega i$ und $\omega j = \omega - 1 - i$, folglich liegen auch diese Elemente in M. Wir sehen also, dass $\mathcal{O}_2$ eine Ordnung ist, und es gilt $t(\mathcal{O}_2) = \mathbb{Z}$. Wie wir später noch feststellen werden, ist $\mathcal{O}_2$ wirklich eine maximale Ordnung .

Ein (evtl. nicht kommutativer) Ring R ohne Nullteiler heißt *Links-Hauptidealring*, wenn jedes Linksideal von der Form Rx für ein x in R ist. Er heißt *Rechts-Hauptidealring*, wenn jedes Rechtsideal von der Form xR für ein $x \in R$ ist.

LEMMA 2.9. *Eine Ordnung $\mathcal{O}$ einer Quaternionenalgebra H ist Links-Hauptidealring genau dann, wenn sie Rechts-Hauptidealring ist.*

BEWEIS. Die Konjugation induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Linksideale von $\mathcal{O}$ und der Menge der Rechtsideale. Genauer: ist $I \subseteq \mathcal{O}$ ein Linksideal, so ist $\overline{I}$ ein Rechtsideal und umgekehrt. Weiter ist $\overline{\mathcal{O}x} = \overline{x}\mathcal{O}$, d.h. Hauptideale gehen auf Hauptideale. Also können wir schließen: Es sind alle Linksideale von $\mathcal{O}$ Hauptideale genau dann, wenn alle Rechtsideale Hauptideale sind. □

Wir nennen eine Ordnung nun schlicht *Hauptidealring*, wenn diese ein Rechts-Hauptidealring ist. Wie wir gerade festgestellt haben, ist sie dann auch immer ein Links-Hauptidealring. Wie im kommutativen Fall gibt es einen damit eng verwandten Begriff:

DEFINITION 2.10. Eine Ordnung $\mathcal{O}$ heißt *rechts-euklidisch* bzgl. der Norm, falls für alle $a,b \in \mathcal{O}$ mit $b \neq 0$ Elemente $q,r \in \mathcal{O}$ existieren, sodass gilt

$$a = bq + r \quad \text{und} \quad |\mathfrak{n}(r)| < |\mathfrak{n}(b)|\,.$$

Analog definiert man *links-euklidisch*, indem man einfach $a = qb + r$ oben einfügt.

Wir interessieren uns hier nur für Division mit Rest bzgl. der Norm, d.h. wir betrachten keine anderen möglichen Gradfunktionen für die Division. Deshalb werden wir den Zusatz „*bzgl. der Norm*“ in Zukunft einfach weglassen. Wieder sieht man, dass wir für Ordnungen in Quaternionenalgebren nicht zwischen Links und Rechts unterscheiden müssen.

LEMMA 2.11. *Eine Ordnung $\mathcal{O}$ in H ist genau dann links-euklidisch, wenn sie rechts-euklidisch ist.*

BEWEIS. Nehmen wir an $\mathcal{O}$ sei rechts-euklidisch. Es seien $a, b \in \mathcal{O}$ beliebig mit $b \neq 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es nun $q, r \in \mathcal{O}$, sodass

$$\overline{a} = \overline{b}q + r \quad \text{und} \quad |\mathfrak{n}(r)| < \left|\mathfrak{n}(\overline{b})\right|$$

gilt. Setze $q' = \overline{q}$ und $r' = \overline{r}$. Es gilt $q', r' \in \mathcal{O}$ wie wir in Bemerkung 2.7 festgestellt haben. Außerdem sieht man

$$a = q'b + r' \quad \text{mit} \quad \left|\mathfrak{n}(r')\right| < |\mathfrak{n}(b)|,$$

also ist $\mathcal{O}$ links-euklidisch. Die andere Richtung sieht man analog. □

Wir werden also in Zukunft schlicht von euklidischen Ordnungen sprechen.

LEMMA 2.12. *Eine euklidische Ordnung $\mathcal{O}$ ist immer auch Hauptidealring.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{O}$ eine euklidische Ordnung und sei $I \subseteq \mathcal{O}$ ein Rechtsideal in $\mathcal{O}$. Wähle $x \in I \setminus \{0\}$, sodass $|\mathfrak{n}(x)|$ minimal ist. Man beachte $\mathfrak{n}(x) \neq 0$, da wir immer voraussetzen, dass H Divisionsalgebra ist. Sei $y \in I$ beliebig. Da $\mathcal{O}$ rechts-euklidisch ist, gibt es $q, r \in \mathcal{O}$ mit

$$y = xq + r \quad \text{und} \quad |\mathfrak{n}(r)| < |\mathfrak{n}(x)|.$$

Weil $r \in I$ gilt und $|\mathfrak{n}(x)|$ minimal gewählt war, folgt $r = 0$. Man kann nun schließen: $I = x\mathcal{O}$. □

LEMMA 2.13. *(Vignéras* [**14**, S.91] *) Eine euklidische Ordnung ist immer maximal.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{O}$ eine nicht maximale Ordnung. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{O}$ nicht euklidisch ist. Nach Voraussetzung gibt es eine maximale Ordnung $\mathcal{O}'$, welche $\mathcal{O}$ enthält. Da $\mathcal{O}$ nicht maximal ist, existiert ein $x \in \mathcal{O}'$ mit $x \notin \mathcal{O}$. Schreibe $x = b^{-1}a$ mit $a, b \in \mathcal{O}$. Dies ist möglich, weil $\mathcal{O}$ eine Ordnung und somit vollständiges Gitter ist[3]. Für alle $q, r \in \mathcal{O}$ mit $a = bq + r$ gilt somit $b(x - q) = r$. Da $x - q \in \mathcal{O}'$ liegt, ist es ganz und die Norm ist eine ganze Zahl. Weil weiter $x \notin \mathcal{O}$, folgt auch $x - q \neq 0$. Damit erhalten wir $|\mathfrak{n}(r)| = |\mathfrak{n}(b)\mathfrak{n}(x - q)| \geq |\mathfrak{n}(b)|$. Insbesondere kann $\mathcal{O}$ nicht euklidisch sein. □

BEISPIEL 2.14. Betrachten wir wieder $H = Q(-1, -1|\mathbb{Q})$ und die Ordnung $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, i, j, \omega]$ mit $\omega = \frac{1}{2}(1 + i + j + ij)$ wie in Beispiel 2.8. Wir werden nun darlegen, warum diese Ordnung euklidisch ist. Im Speziellen wissen wir dann, dass es sich um eine maximale Ordnung handelt.

Ist $x \in H$ beliebig, so finden wir immer ein $y \in \mathbb{Z}[1, i, j, ij] \subset \mathcal{O}$ mit $x - y = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 ij$ und $|z_k| \leq \frac{1}{2}$ für alle $k = 0, \ldots, 3$. Es gilt also $\mathfrak{n}(x - y) \leq 1$ und $\mathfrak{n}(x - y) = 1$ genau dann, wenn $|z_k| = \frac{1}{2}$ für alle $k = 0, \ldots, 3$ gilt. Man stellt aber leicht fest, dass alle Elemente der Form $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \pm \frac{1}{2}j \pm \frac{1}{2}ij$ in der Ordnung $\mathcal{O}$ liegen. Zusammenfassend haben wir gerade konstatiert: Für jedes $x \in H$ gibt es $y \in \mathcal{O}$ mit $\mathfrak{n}(x - y) < 1$. Nun ist es aber einfach einzusehen, dass $\mathcal{O}$ euklidisch ist. Seien $a, b \in \mathcal{O}$ mit $b \neq 0$. Es gibt, wie wir gerade festgestellt haben, ein $q \in \mathcal{O}$ mit $\mathfrak{n}(b^{-1}a - q) < 1$. Folglich gilt auch $\mathfrak{n}(a - bq) < \mathfrak{n}(b)$ und wir haben die gewünschte Division mit Rest: $a = bq - r$ wobei $r := a - bq \in \mathcal{O}$ gesetzt wurde.

[3]Wir können also sogar $b \in \mathbb{Z}$ wählen.

Beispiel 2.15. Wir möchten noch ein weiteres Beispiel im Detail durchgehen. Dieses Mal mit einer Quaternionenalgebra, die über $\mathbb{R}$ zerfällt. Sei $H = Q(2,5|\mathbb{Q})$ und wir betrachten die Ordnung $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, i, \frac{1+j}{2}, \frac{i+ij}{2}]$. Um einzusehen, dass es sich wirklich um eine Ordnung handelt, zeigen wir (analog zum vorangegangenen Beispiel) $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}\frac{1+j}{2} + \mathbb{Z}\frac{i+ij}{2}$. Dazu genügt es festzustellen, dass das vollständige Gitter $M := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}\frac{1+j}{2} + \mathbb{Z}\frac{i+ij}{2}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist. Unter Verwendung der Distributivität ist es ausreichend folgende Tabelle zu bestimmen.

$\cdot$	i	$\frac{1+j}{2}$	$\frac{i+ij}{2}$
i	2	$\frac{i+ij}{2}$	$1+j$
$\frac{1+j}{2}$	$\frac{i-ij}{2}$	$\frac{3+j}{2}$	$-i$
$\frac{i+ij}{2}$	$1-j$	$\frac{3i+ij}{2}$	-2

Man sieht sofort, dass alle Einträge der Tabelle wieder Elemente von M sind. Wir wissen somit, dass $\mathcal{O}$ eine Ordnung ist. Wir bemerken zusätzlich $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$. Schließlich wollen wir auch hier zeigen, dass es sich um eine euklidische Ordnung handelt. Dazu beweisen wir zunächst: für alle $x \in H$ gibt es $y \in \mathcal{O}$ mit $|\mathfrak{n}(x-y)| < 1$. Sei also $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij \in H$ beliebig. Wähle zuerst $k_2 \in \mathbb{Z}$ so, dass $\left|x_2 - \frac{k_2}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$ gilt. Als nächstes wählen wir $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit $\left|x_0 - \frac{k_2}{2} - k_0\right| \leq \frac{1}{2}$. Sodann wählen wir $k_3 \in \mathbb{Z}$, welches $\left|x_3 - \frac{k_3}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$ erfüllt und schließlich noch $k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\left|x_1 - \frac{k_3}{2} - k_1\right| \leq \frac{1}{2}$. Wir setzen nun $y := k_0 + k_1 i + k_2\frac{1+j}{2} + k_3\frac{i+ij}{2}$ und betrachten $z := x - y = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 ij$. Nach Konstruktion von y gilt nun $|z_0|, |z_1| \leq \frac{1}{2}$ und $|z_2|, |z_3| \leq \frac{1}{4}$. Damit gilt nun

$$-\frac{13}{16} = -\frac{2}{4} - \frac{5}{16} \leq \mathfrak{n}(x-y) = z_0^2 - 2z_1^2 - 5z_2^2 + 10z_3^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{10}{16} = \frac{14}{16},$$

und damit $|\mathfrak{n}(x-y)| < 1$ wie behauptet.

Jetzt verfahren wir wie in Beispiel 2.14. Seien $a, b \in \mathcal{O}$ und $b \neq 0$. Es gibt $q \in \mathcal{O}$ mit $\left|\mathfrak{n}(b^{-1}a - q)\right| < 1$. Damit folgt sofort $|\mathfrak{n}(a - bq)| < |\mathfrak{n}(b)|$. Folglich ist $\mathcal{O}$ eine euklidische Ordnung und somit ebenfalls maximal.

Bemerkung 2.16. Wir wollen kurz noch auf eine wichtige Tatsache hinweisen: Ist $\mathcal{O}$ eine maximale Ordnung, so gilt immer $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$. Wir skizzieren kurz den Beweis, allerdings ohne dabei alle Begriffe genau zu erklären. Mehr zu Diskriminante und Differente findet der Leser bei Reiner [**7**, S. 217 ff.] und Vignéras [**14**, S.24 ff.].

Bekanntlich induziert die reduzierte Spur t auf H eine nicht-degenerierte Bilinearform $H \times H \to \mathbb{Q}$. Mit Hilfe dieser Form definiert man $\mathcal{O}^* := \{\, x \in H \mid t(x\mathcal{O}) \subseteq \mathbb{Z} \,\}$ das duale Gitter. Dieses ist ein zweiseitiger $\mathcal{O}$-Modul und vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter in H. Weiter kann man für jedes vollständige $\mathbb{Z}$-Gitter $\Lambda \subset H$ ein neues Gitter Λ^{-1} definieren durch

$$\Lambda^{-1} := \{\, x \in H \mid \Lambda x \Lambda \subseteq \Lambda \,\}.$$

Auch dieses ist ein vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter in H. Des Weiteren gilt: Ist Λ ein $\mathcal{O}$-Linksmodul, so ist Λ^{-1} ein $\mathcal{O}$-Rechtsmodul und umgekehrt. Wir definieren nun die *Differente* $\mathfrak{D}$ von $\mathcal{O}$ durch $\mathfrak{D}(\mathcal{O}) := (\mathcal{O}^*)^{-1}$. Man kann zeigen, dass diese ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{O}$ ist. Weiter definiert man die *reduzierte Diskriminante* $\mathrm{d}(\mathcal{O})$ als das von $\{\, \mathfrak{n}(x) \mid x \in \mathfrak{D}(\mathcal{O}) \,\}$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}$. Diese Diskriminante enthält viel Information über die Ordnung. Man kann z.B. anhand der Diskriminante erkennen, ob eine gegebene Ordnung maximal ist. Es gilt: Die Ordnung $\mathcal{O}$ ist maximal genau dann, wenn

$\mathrm{d}(\mathcal{O}) = \prod_{p\neq\infty\in\mathrm{Ram}(H)} p$ (vgl. Vignéras [**14**, S.85]). Insbesondere ist die reduzierte Diskriminante einer maximalen Ordnung immer quadratfrei.

Wenden wir dies nun auf die Frage an, ob eine Ordnung $\mathcal{O}$ mit $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$ maximal sein kann. Man stellt fest, dass in diesem Fall $\mathcal{O}^* \supseteq \frac{1}{2}\mathcal{O}$ sein muss. Damit folgt[4] aber weiter $\mathfrak{D}(\mathcal{O}) \subseteq 2\mathcal{O}$ und außerdem $\mathrm{d}(\mathcal{O}) \subseteq 4\mathbb{Z}$. Damit ist die Diskriminante nicht quadratfrei und die betrachtete Ordnung nicht maximal.

Wir werden später an einer wichtigen Stelle voraussetzen, dass die betrachtete Ordnung ein Hauptidealring ist. Wie wir gerade gesehen haben, gibt es Ordnungen, die diese Voraussetzung erfüllen. Es gibt noch viele weitere Beispiele für Ordnungen, die Hauptidealringe oder sogar euklidisch sind.

2. Nicht-abelsche Kohomologie der SL_2 über Ordnungen

Es sei also weiterhin H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$. Wie immer setzen wir voraus, dass es sich um einen Schiefkörper handelt. Des Weiteren sei $\mathcal{O}$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung in H. Wir betrachten nun die allgemeine lineare Gruppe über dieser Ordnung:

$$\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) = \{ X \in M_2(\mathcal{O}) \mid X \text{ invertierbar in } M_2(\mathcal{O}) \}.$$

Betrachten wir $\mathsf{nrd} : M_2(H) \to \mathbb{Q}$, die reduzierte Norm der zentralen einfachen $\mathbb{Q}$-Algebra $M_2(H)$. Anhand der expliziten Normformel aus Lemma 1.20 zusammen mit der Tatsache, dass Norm und Spur ganzer Elemente ganz sind (Lemma 2.4), sehen wir, dass die Einschränkung der reduzierten Norm auf $M_2(\mathcal{O})$ nur ganzzahlige Werte annimmt. Durch die Multiplikativität der reduzierten Norm sehen wir außerdem $\mathsf{nrd}(X) = \pm 1$ für alle $X \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$. Weiter interessiert uns die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) = \{ X \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \mid \mathsf{nrd}(X) = 1 \}.$$

Ist H eine total definite Quaternionenalgebra, d.h. sie verzweigt über $\mathbb{R}$, so nimmt die reduzierte Norm ohnehin nur positive Werte an: Es gilt also $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.

Die Involution $\tau : \mathrm{GL}_2(H) \to \mathrm{GL}_2(H)$ aus Abschnitt 3, definiert durch ${}^{\tau}A := (A^*)^{-1}$, schränkt sich offensichtlich zu einer Involution auf $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ ein. Mit Lemma 1.19 (1) sieht man außerdem, dass sich τ zu einer Involution auf $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ einschränkt. Wir betrachten die induzierte Linkswirkung der zweielementigen Gruppe $\mathfrak{c}_2 = \{1, \tau\}$ auf $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ bzw. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Die nicht-abelsche Galoiskohomologie der Gruppe $\mathfrak{c}_2$ mit Werten in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ bzw. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ist also definiert, und diese wollen wir nun bestimmen. Wir erinnern daran, dass ein 1-Kozykel durch eine hermitesche Matrix gegeben ist, die wir immer auch als hermitesche Form betrachten können.

Es sei außerdem daran erinnert, dass wir die Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(H))$ bereits bestimmt haben (siehe Proposition 1.37 und 1.38). Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(H)) = \{ [1,1] \}$, falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt.
(2) $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(H)) = \{ [1,1], [1,-1], [1, I_{1,1}] \}$, falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt.

Hierbei bezeichnet $I_{1,1}$ wieder die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Die Inklusion $\iota : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(H)$ induziert eine natürliche Abbildung (siehe Appendix A)

$$\iota_* : H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})) \to H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(H)).$$

---

[4] Dieser Schritt erfordert einige Überlegungen: Es gilt erstens $(\mathcal{O}^*)^* = \mathcal{O}$. Dies erhält man z.B. mit Hilfe einer dualen Basis, denn $\mathcal{O}$ muss ein freier $\mathbb{Z}$-Modul sein. Man sieht zweitens: ist $x \in \mathfrak{D}(\mathcal{O})$, so gilt $\mathcal{O}^* x \mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{O}^*$ und insbesondere $\frac{1}{2}x\mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{O}^*$. Damit folgt $t(\frac{1}{2}x\mathcal{O}^*) \subseteq t(\mathcal{O}^*) \subseteq \mathbb{Z}$ und damit $\frac{1}{2}x \in (\mathcal{O}^*)^* = \mathcal{O}$.

Wir wollen zunächst das Urbild der Klasse $[1, I_{1,1}] \in H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(H))$ unter ι_* bestimmen. Dieses Urbild werden wir gelegentlich den *indefiniten Teil* der Kohomologie nennen. Im Fall (1) umfasst der indefinite Teil die ganze erste Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}))$, da $[1, 1] = [1, I_{1,1}]$ als Kohomologieklassen bzgl. $\mathrm{GL}_2(H)$ gilt.

Vorab eine Warnung an den Leser: Es treten nun zwei Arten von Kohomologieklassen auf - die Elemente von $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}))$ und die von $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(H))$. Unsere Notation ist also etwas ungenau, dennoch hoffen wir ausreichend klar formuliert zu haben.

2.1. Der indefinite Teil der Kohomologie. Sei dazu im Folgenden $X \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ eine hermitesche Matrix, d.h. $X^* = X$. Wir nehmen an, die Klasse des Kozykels $(1, X)$ in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}))$ liege im Urbild $\iota_*^{-1}([1, I_{1,1}])$. Durch X erhalten wir eine hermitesche Form $b : \mathcal{O}^2 \times \mathcal{O}^2 \to \mathcal{O}$, definiert durch $b(u, v) := u^*\, X\, v$ für alle $u, v \in \mathcal{O}^2$. Wir werden nun die Eigenschaften dieser Form untersuchen.

LEMMA 2.17. *Die Form b ist isotrop über $\mathcal{O}$, d.h. es gibt ein $u \neq 0 \in \mathcal{O}^2$ mit $b(u, u) = 0$.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(H)$ mit $A^*XA = I_{1,1}$. Offensichtlich gibt es (viele) Vektoren $v \in H^2$ mit $v \neq 0$ und $v^*I_{1,1}v = 0$. Das bedeutet aber $(Av)^*X(Av) = 0$. Wir definieren $u' = Av$ und bemerken, dass $u' \neq 0$ gilt, weil A invertierbar ist. Da $\mathcal{O}$ eine Ordnung und damit ein vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter ist, gibt es $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass $u := mu' \in \mathcal{O}^2$ ist. Man sieht nun, dass $b(u, u) = m^2(u')^*Xu' = 0$ ist. Damit ist b eine isotrope Form. □

DEFINITION 2.18. Ein Vektor $u \in \mathcal{O}^2$ heißt *links primitiv*, wenn seine Einträge als Linksideal ganz $\mathcal{O}$ erzeugen. Genauer: $u = (u_1, u_2)^T$ ist links primitiv genau dann, wenn $\mathcal{O}u_1 + \mathcal{O}u_2 = \mathcal{O}$.

Man definiert ganz analog den Begriff *rechts primitiv*. Es ist leicht festzustellen, dass $u = (u_1, u_2)^T$ links primitiv ist genau dann, wenn $\overline{u} = (\overline{u_1}, \overline{u_2})^T$ rechts primitiv ist.

LEMMA 2.19. *Ist $u \in \mathcal{O}^2$ links primitiv, so gibt es ein $v \in \mathcal{O}^2$ mit $b(u, v) = 1$.*

BEWEIS. Da u links primitiv ist, ist $\overline{u}$ rechts primitiv, d.h. $\overline{u_1}\mathcal{O} + \overline{u_2}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Es gibt also $w_1, w_2 \in \mathcal{O}$ mit $\overline{u_1}w_1 + \overline{u_2}w_2 = 1$. Nach Voraussetzung ist X invertierbar in $M_2(\mathcal{O})$, es gibt insbesondere ein $v \in \mathcal{O}^2$ mit $Xv = w$, wobei $w = (w_1, w_2)^T$ sei. Es gilt nun $b(u, v) = u^*Xv = u^*w = 1$. □

Wir können nun das Urbild $\iota_*^{-1}([1, I_{1,1}])$ bestimmen, wenn wir $\mathcal{O}$ als Hauptidealring annehmen. Wir werden sehen, dass der indefinite Teil immer aus einem oder zwei Elementen besteht. Zur Vereinfachung der Notation sei im Folgenden

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Beweis orientieren wir uns an Serres Darstellung [**12**, S.48] des klassischen Falls von quadratischen Formen über $\mathbb{Z}$.

SATZ 2.20. *Ist die Ordnung $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, so gilt: Ist $X \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ eine hermitesche Matrix mit $\iota_*([1, X]) = [1, I_{1,1}]$, dann folgt $[1, X] = [1, I_{1,1}]$ oder $[1, X] = [1, J]$ als Klassen in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}))$.*

Weiter gilt $[1, J] = [1, I_{1,1}]$ genau dann, wenn $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten zu X wieder die assoziierte Form b. Nach Lemma 2.17 gibt es ein $x \in \mathcal{O}^2$ mit $x \neq 0$ und $b(x,x) = 0$. Sei $x = (x_1, x_2)^T$ mit $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$.

Wir wollen nun zeigen, dass x auch links primitiv gewählt werden kann: Wir betrachten das von x_1 und x_2 erzeugte Linksideal $\mathcal{O}x_1 + \mathcal{O}x_2$ in $\mathcal{O}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, es gilt also $\mathcal{O}x_1 + \mathcal{O}x_2 = \mathcal{O}a$ für ein $a \neq 0 \in \mathcal{O}$. Insbesondere können wir $x_1 = u_1 a$ und $x_2 = u_2 a$ schreiben mit $u_1, u_2 \in \mathcal{O}$. Wir stellen fest, dass $u = (u_1, u_2)^T$ ein links primitiver Vektor ist, denn $\mathcal{O}a = \mathcal{O}x_1 + \mathcal{O}x_2 = (\mathcal{O}u_1 + \mathcal{O}u_2)a$. Wegen $0 = b(x,x) = \overline{a}u^* X u a = \mathfrak{n}(a) b(u,u)$ und $a \neq 0$ folgt $b(u,u) = 0$. Wir können also x links primitiv annehmen.

Wir verwenden nun Lemma 2.19 und finden ein $y \in \mathcal{O}^2$ mit $b(x,y) = 1$. Sei $\omega \in \mathcal{O}$ beliebig und betrachte $z := y - x\omega$. Es gilt $b(z,z) = b(y,y) - t(w)$. Wegen $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}$ ist $2\mathbb{Z} \subseteq t(\mathcal{O})$. Wir können also durch richtige Wahl von ω immer erreichen, dass $b(z,z) = 1$ oder $b(z,z) = 0$ gilt. Diese Fälle wollen wir nun getrennt behandeln.

Fall 1, $b(z,z) = 0$ **:**

Wir zeigen, dass x und z eine Basis des freien $\mathcal{O}$- Rechtsmoduls $\mathcal{O}^2$ bilden. Wegen $b(x,z) = 1$ sind x und z linear unabhängig über H. Wir betrachten $\mathcal{O}^2$ hier als Gitter im H-Rechtsvektorraum H^2. Also spannen sie zusammen ganz H^2 auf. Sei nun $u \in \mathcal{O}^2$, so gibt es $h_1, h_2 \in H$ mit $xh_1 + zh_2 = u$. Wir zeigen nun, dass h_1 und h_2 in $\mathcal{O}$ liegen. Dies folgt einfach aus $h_1 = b(z,u) \in \mathcal{O}$ und $h_2 = b(x,u) \in \mathcal{O}$. Damit ist x, z eine Basis von $\mathcal{O}^2$. Ist A die invertierbare Matrix mit Spalten x, z, so gilt $A^* X A = J$ und damit folgt die Behauptung.

Fall 2, $b(z,z) = 1$ **:**

Ähnlich wie in Fall 1 behaupten wir nun, dass $x' = x - z$ und z eine Basis des $\mathcal{O}$-Rechtsmoduls $\mathcal{O}^2$ bilden. Man stellt fest, dass $b(x',x') = -1$, $b(x',z) = 0$ und $b(z,z) = 1$ gelten. Offenbar sind x' und z linear unabhängig über H und sie erzeugen damit H^2. Sei $u \in \mathcal{O}^2$, wir schreiben $u = x'h_1 + zh_2$ mit $h_1, h_2 \in H$. Man sieht leicht, dass h_1, h_2 in der Ordnung $\mathcal{O}$ liegen, denn es ist

$$h_1 = -b(x',u) \in \mathcal{O}, \quad h_2 = b(z,u) \in \mathcal{O}.$$

Sei nun A die Matrix mit den Spalten z und x', so gilt $A^* X A = I_{1,1}$ und somit folgt die Behauptung.

Wir wollen nun noch zeigen, dass genau dann $[1, J] = [1, I_{1,1}]$ ist, wenn $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ gilt. Es sei zunächst daran erinnert, dass $t(\mathcal{O})$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist und dieses Ideal entweder $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ oder $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$ ist.

Ist $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$, so können wir in obigem Beweis, durch geschickte Wahl von ω, beide Fälle erreichen. Es gilt also $[1, J] = [1, X] = [1, I_{1,1}]$. Es genügt also zu zeigen: Ist $[1, J] = [1, I_{1,1}]$, so gibt es ein Element mit Spur 1 in $\mathcal{O}$. Die Annahme $[1, J] = [1, I_{1,1}]$ impliziert, dass die von J bzw. $I_{1,1}$ induzierten hermiteschen Formen auf $\mathcal{O}^2$ äquivalent sind. Sie stellen also die selben Werte dar. Die von $I_{1,1}$ kommende Form stellt die 1 dar, also auch die von J induzierte. Es gibt somit $u = (u_1, u_2)^T \in \mathcal{O}^2$ mit $1 = u^* J u = t(\overline{u_1} u_2)$. $\square$

Bemerkung 2.21. Der Fall $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$ ist mit Vorsicht zu genießen. Dem Autor ist kein Beispiel einer Ordnung bekannt, welche Hauptidealring ist und $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$ erfüllt. Andererseits ist ebenfalls nicht klar, warum es solche Ordnungen nicht geben sollte. Es sei nochmals darauf hingewiesen: die wichtige Klasse der maximalen Ordnungen erfüllt immer $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ (siehe Bemerkung 2.16). Wir werden diesen Fall weiter mit uns „herumtragen“, auch weil die Hoffnung besteht, dass die Voraussetzung $\mathcal{O}$ sei Hauptidealring noch abgeschwächt werden könnte. Diese Voraussetzung wird im Beweis nur an einer

Stelle verwendet: zum Finden eines links primitiven isotropen Vektors für die von X induzierte Form. Findet man solche Vektoren auch unter schwächeren Voraussetzungen, so lässt sich der Satz direkt übertragen.

Wir möchten nun dieses Ergebnis nutzen, um die erste Kohomologiemenge mit Werten in der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ zu verstehen. Ist H eine Quaternionenalgebra, welche über $\mathbb{R}$ verzweigt, so gilt $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$. Wir kennen also in diesem Fall den indefiniten Teil der Kohomologie bereits. Wenden wir uns dem Fall zu, dass H über $\mathbb{R}$ zerfällt.

Bemerkung 2.22. Sei $\mathcal{O}$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung in einer Quaternionenalgebra H, welche über $\mathbb{R}$ zerfalle. Ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, so gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ mit $\mathsf{nrd}(A) = -1$. Dies sieht man wie folgt ein: Da H über $\mathbb{R}$ zerfällt, ist der indefinite Teil gleich der gesamten Kohomologie. Nach Satz 2.20 muss der Kozykel $(1,1)$ zu einem der Kozykel $(1,J)$ und $(1,I_{1,1})$ kohomolog sein. Falls die Kozykel $(1,J)$ und $(1,I_{1,1})$ für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}))$ nicht kohomolog sind (d.h. $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$), nimmt die zu J assoziierte Form nur gerade Werte an. Es kann somit $(1,1)$ nur kohomolog zu $(1,I_{1,1})$ sein. Somit gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ mit $A^*A = I_{1,1}$. Nehmen wir die Determinante auf beiden Seiten, so erhalten wir mit Lemma 1.43 das gewünschte Resultat:

$$\mathsf{nrd}(A) \;=\; \det(I_{1,1}) \;=\; -1.$$

Korollar 2.23. *Sei H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, welche über $\mathbb{R}$ zerfällt. Sei weiter $\mathcal{O} \subset H$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung. Ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, so besteht $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ aus zwei oder vier Elementen. Genauer gilt:*

(1) $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ *impliziert* $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) \;=\; \{\,[1,1], [1,I_{1,1}]\,\}$.
(2) $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$ *impliziert* $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) \;=\; \{\,[1,1], [1,I_{1,1}], [1,J], [1,A^*JA]\,\}$.

Hier bezeichnet $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ eine Matrix mit $\mathsf{nrd}(A) = -1$. Eine solche existiert, wie wir in Bemerkung 2.22 gesehen haben.

Beweis. Man sieht sofort, dass alle genannten Kozykel wirklich Kozykel für $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ sind. Weiter sei $(1,X)$ ein Kozykel für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$, es gibt nach Satz 2.20 eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ mit B^*XB gleich $I_{1,1}$ oder J. Gilt $\mathsf{nrd}(B) = 1$, so ist $(1,X)$ zu $(1,I_{1,1})$ bzw. $(1,J)$ kohomolog in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$. Andernfalls gilt $\mathsf{nrd}(B) = -1$ und wir wählen $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ mit $A^*I_{1,1}A = 1$ und $\mathsf{nrd}(A) = -1$ (siehe Bemerkung 2.22). Dann ist A^*B^*XBA gleich 1 oder A^*JA. Also ist jeder Kozykel einer der vier genannten Klassen zuzuordnen. Nun überlegen wir noch warum bzw. wann diese Klassen nicht zusammenfallen. Wegen des Zusammenhangs von Determinante und reduzierter Norm aus Lemma 1.43 kann der triviale Kozykel $(1,1)$ nie zu $(1,I_{1,1})$ oder $(1,J)$ kohomolog bzgl. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ sein. Dasselbe gilt für $(1,A^*JA)$. Wählen wir $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ mit $A^*I_{1,1}A = 1$ wie oben, so sieht man sofort: Die Kozykel $(1,1)$ und $(1,A^*JA)$ sind kohomolog bzgl. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ genau dann, wenn die Kozykel $(1,I_{1,1})$ und $(1,J)$ kohomolog bzgl. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ sind. Wiederum folgt mit dem Zusammenhang von Determinante und reduzierter Norm aus Lemma 1.43, dass dies genau dann der Fall ist, wenn sie kohomolog bzgl. $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ sind. Diese Frage haben wir aber in Satz 2.20 schon beantwortet. □

Beispiel 2.24. Wir werden dies an den uns bekannten Beispielen von Ordnungen kurz explizit machen. Sei $H = Q(2,5|\mathbb{Q})$ und $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, i, \frac{1+j}{2}, \frac{i+ij}{2}]$ wie in Beispiel 2.15. Wir wissen, dass $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring ist und $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ gilt. Da H über $\mathbb{R}$ zerfällt, kennen wir durch Korollar 2.23 die erste Kohomologiemenge

$$H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) \;=\; \{\,[1,1],\, [1,I_{1,1}]\,\}.$$

Betrachten wir nun den total definiten Fall $H = Q(-1,-1|\mathbb{Q})$ mit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1,i,j,\omega]$ aus Beispiel 2.14. Wieder ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring mit $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$, allerdings verzweigt H über $\mathbb{R}$ und wir kennen daher nur den indefiniten Teil der ersten nicht-abelschen Kohomologie

$$H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) \;=\; \{\, [1, I_{1,1}] \,\} \,\cup\, \iota_*^{-1}([1,1]) \,\cup\, \iota_*^{-1}([1,-1]).$$

Wir nennen die zwei weiteren Teile der Kohomologiemenge den positiv bzw. negativ definiten Teil.

3. Hauptkongruenzuntergruppen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz den Begriff der Hauptkongruenzuntergruppen in $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ einführen und zeigen, dass diese Gruppen unter geeigneten Annahmen torsionsfrei[5] sind.

Es sei H eine Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$, welche keine Matrixalgebra ist. Weiter betrachten wir eine $\mathbb{Z}$-Ordnung $\mathcal{O} \subset H$. Ist $J \subset \mathcal{O}$ ein zweiseitiges Ideal, so ist $\mathcal{O}/J$ ein Ring und die kanonische Projektion $\pi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}/J$ ist ein Homomorphismus von Ringen. Dieser liefert einen Homomorphismus von Ringen $\pi_n : M_n(\mathcal{O}) \to M_n(\mathcal{O}/J)$, indem π auf alle Einträge einer Matrix angewandt wird. Weiter induziert π_n einen Gruppenhomomorphismus $\pi_n^\times : \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}/J)$ der Einheitengruppen.

Definition 2.25. Die normale Untergruppe $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}, J) \;:=\; \ker(\pi_n^\times)$ von $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ heißt *Hauptkongruenzuntergruppe* zum Ideal J.

Auf analoge Art und Weise lassen sich Hauptkongruenzuntergruppen in der $\mathrm{GL}_n(R)$ eines beliebigen (üblicherweise kommutativen) Ringes R definieren. Ein klassisches Resultat besagt, dass die Hauptkongruenzuntergruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}, (q))$ für alle $q \geq 3$ torsionsfrei sind (vergleiche Jantzen, Schwermer [**4**, S.372 ff.]). Auf sehr ähnliche Weise werden wir die Torsionsfreiheit für eine bestimmte Familie von Hauptkongruenzuntergruppen in $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ zeigen. Dazu werden wir wieder die nützliche Voraussetzung, $\mathcal{O}$ sei Hauptidealring, treffen.

Ist $q \in \mathbb{Z}$, so ist $q\mathcal{O} = \mathcal{O}q$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{O}$. Wir notieren die Hauptkongruenzuntergruppe zum Ideal $q\mathcal{O}$ im Folgenden kurz mit $\Gamma_n(q) := \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}, q\mathcal{O})$.

Satz 2.26. *Sei H eine $\mathbb{Q}$-Quaternionenalgebra und $\mathcal{O}$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung. Ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, so gilt: Für alle $q \in \mathbb{Z}$ mit $q \geq 3$ ist die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma_n(q)$ torsionsfrei.*

Beweis. Angenommen $\Gamma_n(q)$ ist nicht torsionsfrei, dann finden wir ein Torsionselement $g \in \Gamma_n(q)$ mit $g \neq 1_n$. Es gibt also eine ganze Zahl $m > 1$, sodass $g^m = 1_n$ gilt. Da g Element der Hauptkongruenzuntergruppe ist, können wir $g = 1_n + qB$ schreiben mit einer Matrix $B = (b_{st})_{s,t} \in M_n(\mathcal{O})$. Das von den Einträgen von B erzeugte Rechtsideal ist nach Voraussetzung ein Hauptideal: es gibt somit ein $a \in \mathcal{O}$ mit

$$a\mathcal{O} \;=\; \sum_{s,t} b_{st}\mathcal{O}.$$

[5]Eine Gruppe G heißt torsionsfrei, wenn sie außer dem neutralen Element keine Elemente endlicher Ordnung enthält.

Wir können also $B = aB'$ schreiben, mit $B' = (b'_{st})_{s,t} \in M_n(\mathcal{O})$. Weiter gilt natürlich $\sum_{s,t} b'_{st}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Unter Verwendung der Binomischen Formel erhalten wir

$$1_n \;=\; g^m \;=\; 1_n + mqaB' + \sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k} q^k aB'B^{k-1}. \tag{3.1}$$

Wir verwenden hier, dass q im Zentrum von $\mathcal{O}$ liegt. Es gilt also für alle $1 \le s,t \le n$

$$mqab'_{st} \;=\; q^2 a x_{st}$$

mit gewissen Elementen $x_{st} \in \mathcal{O}$. Weil $m \in \mathbb{Z}$ ist, können wir qa kürzen und erhalten $mb'_{st} = qx_{st}$. Wegen $\sum_{s,t} b'_{st}\mathcal{O} = \mathcal{O}$ können wir Elemente $w_{st} \in \mathcal{O}$ finden, sodass $\sum_{s,t} b'_{st}w_{st} = 1$ gilt. Wir erhalten damit

$$m \;=\; m\sum_{s,t} b'_{st}w_{st} \;=\; q\sum_{s,t} x_{st}w_{st}.$$

Also sehen wir $q \mid m$. Wegen $q \ge 3$ folgt sofort: $\Gamma_n(q)$ enthält keine Elemente der Ordnung 2. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass m eine ungerade Primzahl p ist, denn ist p Primteiler von m, so ist $g^{m/p}$ Torsionselement der Ordnung p. Wegen $q \ne 1$ folgt aus $q \mid m = p$ natürlich $q = p$. Da p eine ungerade Primzahl ist, teilt p den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{2} = p\frac{p-1}{2}$. Mit Gleichung (3.1) erhalten wir für alle s,t

$$p^2ab'_{st} \;=\; p^3ay_{st}$$

mit gewissen $y_{st} \in \mathcal{O}$. Durch Kürzen sehen wir $b'_{st} = py_{st}$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl der b'_{st} mit $\sum_{s,t} b'_{st}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Wir können nun schließen, dass $\Gamma_n(q)$ keine Torsionselemente besitzt. □

3.1. Abschätzungen für den Index. Wir möchten nun noch eine einfache Abschätzung für den Index der Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma_n(q)$ in $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ herleiten. Da wir dies später nur für den Fall $n = 2$ benötigen, werden wir uns auf die Behandlung dieses Falles beschränken. Man stellt übrigens leicht fest, dass $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ genau q^4 Elemente besitzt. Dies sieht man wie folgt: Ist $v_1, \ldots, v_4$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}$, so sind die Bilder $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_4)$ unter der kanonischen Projektion $\pi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}/q\mathcal{O}$ eine $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$. Offensichtlich erzeugen die Bilder $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$. Wir zeigen, dass sie auch linear unabhängig sind: Angenommen $\sum_{k=1}^4 m_k\pi(v_k) = 0$ für gewisse $m_k \in \mathbb{Z}$, dann sieht man

$$\sum_{k=1}^{4} m_kv_k \;\in q\mathcal{O}.$$

Es gibt somit ein $x \in \mathcal{O}$ mit $\sum_{k=1}^4 m_kv_k = qx$. Man schreibt x bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_4$ als $x = \sum_{k=1}^4 x_kv_k$ und stellt fest, dass $m_k = qx_k$ für alle $k = 1, \ldots, 4$ gilt. Dies verwenden wir, um die Größe der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$ abzuschätzen.

Lemma 2.27. *Die Gruppe* $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$ *hat höchstens* $(q^8 - 1)(q^8 - q^4)$ *Elemente.*

Beweis. Es sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$. Da A invertierbar ist, liefert A einen Automorphismus ϕ_A des $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$-Rechtsmoduls $(\mathcal{O}/q\mathcal{O})^2$. Wegen der Injektivität von ϕ_A kann die erste Spalte nicht Null sein, es gibt also höchstens $(q^4)^2 - 1$ mögliche erste Spalten[6]. Außerdem kann die zweite Spalte kein $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ Rechts-Vielfaches der ersten Spalte sein. Es sei $(x,y)^T \in (\mathcal{O}/q\mathcal{O})^2$ die erste Spalte. Angenommen $(x,y)u = (x,y)v$ für irgendwelche $u \ne v \in \mathcal{O}/q\mathcal{O}$, dann ist $u - v \ne 0$ und es gilt $x(u-v) = 0$ und $y(u-v) = 0$.

[6]Hat $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ viele Nullteiler, gibt es natürlich wesentlich weniger zulässige erste Spalten.

Das heißt $\phi_A((u-v,0)^T) = 0$, folglich ist ϕ_A nicht injektiv. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von A, also gibt es q^4 verschiedene Vielfache der ersten Spalte. Wir erkennen also, dass es höchstes $q^8 - q^4$ mögliche zweite Spalten gibt. □

BEISPIEL 2.28. Wir möchten ein warnendes Beispiel geben, welches illustriert, dass diese Abschätzung im Allgemeinen sehr schlecht sein kann.

Wir betrachten $H = Q(-1,-1|\mathbb{Q})$ und die $\mathbb{Z}$-Ordnung $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1,i,j,\omega]$ mit $\omega = \frac{1+i+j+ij}{2}$. Weiter wählen wir $q = 3$. Man stellt leicht fest, dass $\mathcal{O}/3\mathcal{O} = \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3 i \oplus \mathbb{F}_3 j \oplus \mathbb{F}_3 ij$ mit $i^2 = \overline{2}$, $j^2 = \overline{2}$ und $ij = -ji$ gilt. Hierbei bezeichnet $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ den Körper mit drei Elementen. Das heißt, es gilt $\mathcal{O}/3\mathcal{O} \cong Q(\overline{2},\overline{2}|\mathbb{F}_3)$. Da es keine nicht-kommutativen endlichen Divisionsalgebren gibt[7], gilt $\mathcal{O}/3\mathcal{O} \cong M_2(\mathbb{F}_3)$. Folglich ist die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/3\mathcal{O})$ isomorph zu $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_3)$. Die Kardinalität der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ist bekannt und es gilt $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k)$. Die Abschätzung aus Lemma 2.27 ergibt eine obere Schranke von $(3^8-1)(3^8-3^4) = 42\,508\,800$ obwohl die Gruppe „nur“ $(3^4-1)(3^4-3)(3^4-3^2)(3^4-3^3) = 24\,261\,120$ Elemente hat.

Schränken wir die reduzierte Norm $\mathsf{nrd} : M_2(H) \to \mathbb{Q}$ auf $M_2(\mathcal{O})$ ein, so erhalten wir eine multiplikative Abbildung mit ganzzahligen Werten. Dies sieht man z.B. aus der expliziten Normformel (Lemma 1.20) und der Tatsache, dass Norm und Spur ganzer Elemente ganz sind (Lemma 2.4). Man sieht mit der expliziten Formel außerdem, dass sie zu einer multiplikativen Abbildung $\overline{\mathsf{nrd}} : M_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ faktorisiert. Wir bekommen somit einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\mathsf{nrd}} : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O}) \to (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Wir bezeichnen das Bild dieser Abbildung temporär mit B. Damit definieren wir die Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O}) := \{\, A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O}) : |\, \overline{\mathsf{nrd}}(A) = \overline{1} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \,\}.$$

Es gilt nach dem Homomorphiesatz $|\,\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})||B| = |\,\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})|$. Da B sicherlich alle Quadrate aus $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ enthält, können wir die Kardinalität von $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$ nach oben abschätzen.

LEMMA 2.29. *Es gilt*

$$|\,\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})| \le \frac{(q^8-1)(q^8-q^4)}{\alpha(q)},$$

wobei $\alpha(q)$ *die Anzahl der Quadrate in* $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ *sei.*

Die Funktion α ist eine wohlbekannte zahlentheoretische Funktion. Ist $q = \prod_p p^{\nu_p}$, so gilt bekanntlich

$$\alpha(q) = 2^{\max(\nu_2-3,0)} \prod_{p\neq 2} \frac{(p-1)p^{\nu_p-1}}{2}.$$

Dies sieht man z.B. aus der Tatsache, dass $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)p^{n-1}\mathbb{Z}$ für alle $n \ge 1$ und $p \neq 2$, sowie $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$ für alle $n \ge 3$ gilt (siehe z.B. [**1**, S.115 ff.]). Mit Hilfe des Homomorphiesatzes haben wir damit auch Abschätzungen für den Index der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_2(q)$ hergeleitet.

LEMMA 2.30. *Der Index von* $\Gamma_2(q)$ *in* $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ *ist kleiner oder gleich* $(q^8-1)(q^8-q^4)$. *Der Index von* $\Gamma_2(q) \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ *in* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ *ist kleiner oder gleich* $\frac{(q^8-1)(q^8-q^4)}{\alpha(q)}$.

BEWEIS. Es ist, nach dem Homomorphiesatz, $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})/\Gamma_2(q)$ isomorph zum Bild der Abbildung $\pi_2^\times : \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$. Hat also höchstens so viele Elemente wie $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$. Analog sieht man die Behauptung für $\Gamma_2(q) \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Hier verwendet man, dass das Bild $\pi_2^\times(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$ liegt. □

[7] Dies findet man bei Weil [**15**, Thm.1, S.1] oder Jantzen,Schwermer [**4**, Satz 7.13, S.328].

KAPITEL 3

Geometrie der speziellen linearen Gruppe

In diesem Kapitel möchten wir die geometrischen Eigenschaften von gewissen Untergruppen der speziellen linearen Gruppe über einer Ordnung verstehen. Das heißt, wir werden diese Untergruppen von $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ auf geeigneten Räumen wirken lassen. Diese Räume werden Riemannsche symmetrische Räume sein. Um eine gute Grundlage zu schaffen, werden wir dazu auch einige allgemeine Resultate zu symmetrischen Räumen und isometrischen Wirkungen herleiten. Insbesondere werden uns die Fixpunkte solcher Wirkungen interessieren.

Im Folgenden bezeichnet H immer eine Quaternionenalgebra über dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wir werden immer voraussetzen, dass H eine Divisionsalgebra ist. Wir werden zunächst H und $M_n(H)$ bzw. $\mathrm{SL}_n(H)$ an der reellen Stelle betrachten und uns überlegen, wie sich die Involution τ entsprechend fortsetzen lässt. Weiter werden wir dann einen torsionsfreien Normalteiler $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ auf dem zugehörigen symmetrischen Raum X wirken lassen. Wir erhalten den Raum X/Γ auf dem die Involution $\tau : \mathrm{SL}_2(H) \to \mathrm{SL}_2(H)$ eine Wirkung der zweielementigen Gruppe induziert. Ziel ist es, die Fixpunktmannigfaltigkeit dieser Wirkung zu verstehen.

1. Reelle Fortsetzungen und Lie Gruppen

Untersuchen wir die Quaternionenalgebra H an der reellen Stelle $H_\mathbb{R} := H \otimes \mathbb{R}$, so müssen wir immer zwei Fälle unterscheiden: entweder H verzweigt ($H_\mathbb{R} = \mathbb{H}$) oder H zerfällt ($H_\mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$). Im ersten Fall ist $M_n(H) \otimes \mathbb{R} \cong M_n(\mathbb{H})$, im zweiten gilt $M_n(H) \otimes \mathbb{R} \cong M_{2n}(\mathbb{R})$. Wir werden gleich explizit solche Isomorphismen angeben, um dann ohne weitere Erwähnung $M_n(H) \otimes \mathbb{R}$ mit $M_n(\mathbb{H})$ bzw. $M_{2n}(\mathbb{R})$ zu identifizieren. Außerdem setzt sich der involutive Antiautomorphismus $\cdot^* : M_n(H) \to M_n(H)$ aus Lemma 1.18 durch $(A \otimes \mu)^* := A^* \otimes \mu$ auf $M_n(H) \otimes \mathbb{R}$ fort. Wir werden auch klären, wie diese Fortsetzung auf $M_n(\mathbb{H})$ bzw. $M_{2n}(\mathbb{R})$ aussieht. Wir nennen involutive Antiautomorphismen auf Algebren küftig schlicht Involutionen oder Algebren-Involutionen. Diese sind von unseren Involutionen auf Gruppen, im Sinne von Automorphismen der Ordnung zwei, sorgfältig zu trennen. Schließlich werden wir noch einige Lie Gruppen vorstellen, denen wir in dieser Arbeit noch begegnen werden.

1.1. Was ist $M_n(H) \otimes \mathbb{R}$? Im Fall $H_\mathbb{R} = \mathbb{H}$ ist dies ganz einfach. Ist $H = Q(-a,-b|\mathbb{Q})$ mit rationalen $a, b > 0$, so ist $H = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i' \oplus \mathbb{Q}j' \oplus \mathbb{Q}i'j'$ mit $i'^2 = -a$, $j'^2 = -b$ und $i'j' = -j'i'$. Außerdem haben wir die Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}ij$ mit $i^2 = -1$, $j^2 = -1$ und $ij = -ji$. Offensichtlich definiert folgende Abbildung einen Isomorphismus $\alpha : H_\mathbb{R} \to \mathbb{H}$: $x_0 + x_1 i' + x_2 j' + x_3 i'j' \otimes 1 \mapsto x_0 + x_1\sqrt{a}i + x_2\sqrt{b}j + x_3\sqrt{ab}ij$. Damit erhalten wir sofort einen Isomorphismus $f : M_n(H) \otimes \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{H})$ durch $(a_{kl})_{k,l} \otimes 1 \mapsto (\alpha(a_{kl} \otimes 1))_{k,l}$. Weiter sehen wir, weil α äquivariant bzgl. der Konjugationen auf H und $\mathbb{H}$ ist, dass $f(A^* \otimes 1) = f(A \otimes 1)^*$ gilt. Einfacher ausgedrückt: „Konjugieren und Transponieren“ auf $M_n(H)$ setzt sich zu „Konjugieren und Transponieren“ auf $M_n(\mathbb{H})$ fort.

Auch im zweiten Fall ($H_{\mathbb{R}} \cong M_2(\mathbb{R})$) wollen wir einen Isomorphismus

$$f : M_n(H) \otimes \mathbb{R} \to M_{2n}(\mathbb{R})$$

explizit angeben. Wir konstruieren f genau wie die Zerfällung $\mathfrak{z}$ aus Kapitel 1 Abschnitt 2.2.1. Man muss lediglich folgendes beachten: Ist $H = Q(a, b|\mathbb{Q})$ und zerfällt H über $\mathbb{R}$, so ist a oder b positiv. Wegen $Q(a, b|\mathbb{Q}) \cong Q(b, a|\mathbb{Q})$ können wir ohne Einschränkung $a > 0$ annehmen. Wir können also den Körper $L = K(\sqrt{a})$ in $\mathbb{R}$ einbetten $L \hookrightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten stillschweigend L als Teilkörper der reellen Zahlen (d.h. wir haben eine der beiden möglichen Einbettungen fix gewählt) und wir erhalten:

$$M_n(H) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} (M_n(H) \otimes_{\mathbb{Q}} L) \otimes_L \mathbb{R} \xrightarrow{\mathfrak{z}\otimes id} M_{2n}(L) \otimes_L \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} M_{2n}(\mathbb{R})$$

Sei $\upsilon : L \hookrightarrow \mathbb{R}$ die andere Einbettung von L in $\mathbb{R}$. Wir können den Isomorphismus f explizit angeben: Sei $A = B + Cj \in M_n(H)$ mit $B, C \in M_n(L)$, wir erhalten

$$f(A \otimes 1) = \begin{pmatrix} B & bC \\ \upsilon(C) & \upsilon(B) \end{pmatrix}.$$

Wobei wir hier mit $\upsilon(B)$ bzw. $\upsilon(C)$ meinen, dass υ auf jeden Eintrag der Matrix angewandt wird. Wie sieht nun die Involution $\cdot^*$ auf $M_{2n}(\mathbb{R})$ aus? Sei wieder $A = B + Cj$ mit $B, C \in M_n(L)$. Dann ist $A^* = B^* - C^T j$. Wir sehen damit

$$f(A^* \otimes 1) = \begin{pmatrix} \upsilon(B)^T & -bC^T \\ -\upsilon(C)^T & B^T \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} B^T & \upsilon(C)^T \\ bC^T & \upsilon(B)^T \end{pmatrix} u^{-1} = uf(A \otimes 1)^T u^{-1},$$

wobei hier u die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bezeichnet. Erstaunlicherweise erhalten wir hier durch $\cdot^*$ auf $M_n(H)$ eine Involution vom *symplektischen* Typ auf $M_{2n}(\mathbb{R})$. Das heißt, es gilt $u^T = -u$. Insbesondere kann man damit zeigen, dass es keinen Isomorphismus von *Algebren mit Involution* zwischen $(M_{2n}(\mathbb{R}), \cdot^T)$ und $(M_n(H) \otimes \mathbb{R}, \cdot^*)$ gibt. Wir stellen also fest: $X^* = uX^T u^{-1}$ für alle X in $M_{2n}(\mathbb{R})$. Nochmals eine deutliche Warnung: $\cdot^*$ ist *nicht* die Transposition auf $M_{2n}(\mathbb{R})$.

1.2. Assoziierte reelle Gruppen. Wir wollen jetzt die reellen Entsprechungen der allgemeinen und speziellen linearen Gruppe über H betrachten. Was soll das heißen? Wir haben die Gruppen $G_1 = \mathrm{GL}_n(H)$ bzw. $G_2 = \mathrm{SL}_n(H)$, diese sind algebraische Gruppen definiert über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Dazu muss man sich nur überlegen, dass die reduzierte Norm durch ein Polynom[1] mit rationalen Koeffizienten gegeben ist. Uns interessiert nun die zugehörige Gruppe der reellen Punkte $G_i(\mathbb{R})$. Da wir hier keine Details benötigen, werden wir uns damit begnügen die entsprechenden (offensichtlichen) reellen Gruppen anzugeben.

- Falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt, ist $G_1(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ und $G_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$.
- Falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt, ist $G_1(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ und $G_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$.

Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ ist definiert als $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) := \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \mid \mathsf{nrd}(A) = 1 \}$. Hier bezeichnet $\mathsf{nrd} : M_n(\mathbb{H}) \to M_n(\mathbb{H})$ die reduzierte Norm der zentralen einfachen $\mathbb{R}$-Algebra $M_n(\mathbb{H})$. Diese nimmt übrigens nur positive reelle Werte an. Für spätere Referenz formulieren wir folgendes

LEMMA 3.1. *(i) Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine halbeinfache, zusammenhängende reelle Lie Gruppe der Dimension $n^2 - 1$.*
(ii) Für $n \geq 1$ ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ eine halbeinfache, einfach zusammenhängende reelle Lie Gruppe der Dimension $4n^2 - 1$.

[1] Genauer: Ein Polynom in den Koeffizienten der Einträge der Matrix bzgl. einer gewählten $\mathbb{Q}$-Basis von H.

Beweis. Dies ist wohlbekannt: siehe z.B. Knapp [**5**, S.110 ff.] oder Helgason [**3**, S.339 ff.]. Der einfache Zusammenhang von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ folgt aus dem einfachen Zusammenhang von $\mathrm{Sp}(n)$ (siehe unten) und der Cartan-Zerlegung. □

Wir haben in Kapitel 1 insbesondere die Involution τ auf der allgemeinen und speziellen linearen Gruppe über H untersucht. Diese setzt sich auf der entsprechenden reellen Gruppe fort. Da wir in Abschnitt 1.1 schon gesehen haben, wie die Involution $\cdot^* : M_n(H) \otimes \mathbb{R} \to M_n(H) \otimes \mathbb{R}$ aussieht, können wir sofort die Fortsetzung $\tau : G_1(\mathbb{R}) \to G_1(\mathbb{R})$ angeben.

- Für $A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ definieren wir ${}^\tau A \;:=\; u(A^T)^{-1}u^{-1}$.
- Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ definieren wir ${}^\tau A \;:=\; (A^*)^{-1}$.

Offensichtlich schränkt sich τ in beiden Fällen zu einem involutiven Automorphismus auf $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ ein. Weiter werden wir später auch auf die Gruppe $G_1(\mathbb{R})^\tau$ der Fixpunkte von τ treffen. Wir erhalten die folgenden beiden reellen Lie Gruppen:

- $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})^\tau \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T u A = u \,\} \;=:\; \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})^\tau \;=\; \{\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \mid A^* A = 1_n \,\} \;=:\; \mathrm{Sp}(n)$

Die Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ heißt die *reelle symplektische* Gruppe. Die Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$ heißt *quaternionische unitäre Gruppe*. In manchen Büchern wird die Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$ leider auch *symplektische Gruppe* genannt, was auch die Notation Sp erklärt. Da diese Notation sehr gebräuchlich ist, werden wir sie verwenden. Der Leser möge bitte aufmerksam zwischen $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sp}(n)$ unterscheiden. Wir werden wieder einige einfache Eigenschaften dieser Gruppen auflisten.

Lemma 3.2. *(i) Für alle $n \geq 1$ ist die reelle symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ eine halbeinfache, zusammenhängende Lie Gruppe der Dimension $n(2n+1)$.*
(ii) Für alle $n \geq 1$ ist die quaternionische unitäre Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$ eine halbeinfache, kompakte, einfach zusammenhängende Lie Gruppe der Dimension $n(2n+1)$.

Beweis. Dies findet man bei Knapp [**5**, S.110 ff.]. □

Es sei darauf hingewiesen, dass beide Gruppen in der entsprechenden speziellen linearen Gruppe liegen. Das heißt: $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$. Dies folgt aus dem Zusammenhang dieser Gruppen, indem man sich überlegt, dass die Determinante bzw. reduzierte Norm auf diesen Gruppen nur die Werte ± 1 annehmen kann.

Es gibt noch zwei weitere Familien von Lie Gruppen, denen wir später begegnen werden. Seien p, q natürliche Zahlen mit $p + q = n$. Wir bezeichnen wieder durch $I_{p,q}$ die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$. Wir definieren die Gruppe

$$\mathrm{Sp}(p,q) \;:=\; \{\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \mid A^* I_{p,q} A = I_{p,q} \,\}.$$

Diese ist eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$, also eine Lie Untergruppe. Man sieht sofort, dass $\mathrm{Sp}(p,q) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ ist. Wir stellen außerdem fest: $\mathrm{Sp}(n,0) = \mathrm{Sp}(0,n) = \mathrm{Sp}(n)$.

Lemma 3.3. *Für alle p, q mit $p + q = n \geq 1$ ist $\mathrm{Sp}(p,q)$ eine halbeinfache, einfach zusammenhängende Lie Gruppe der Dimension $n(2n+1)$.*

Man sieht durch eine einfache Rechnung, dass

$$\mathrm{Sp}(p,q) \cap \mathrm{Sp}(n) \;=\; \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$$

gilt. Dies kann man auch verwenden, um den einfachen Zusammenhang von $\mathrm{Sp}(p,q)$ zu erkennen: Wir wissen bereits, dass $\mathrm{Sp}(p)$ und $\mathrm{Sp}(q)$ einfach zusammenhängend sind. Dann folgt mit Hilfe der Cartan Zerlegung (siehe unten) auch, dass $\mathrm{Sp}(p,q)$ einfach zusammenhängend ist.

Zum Schluss wollen wir noch den Schnitt der Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ mit der speziellen orthogonalen Gruppe SO_{2n} beschreiben. Sei $A \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$, wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

mit $A_1, \ldots, A_4 \in M_n(\mathbb{R})$. Aus $A^T A = 1_{2n}$ und $A^T u A = u$ folgt $uA = Au$. Das führt zu den Bedingungen $A_1 = A_4$ und $A_2 = -A_3$. Wir sehen also

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ -A_3 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Das ist genau die bekannte Darstellung der komplexen Matrix $A_1 + iA_3$ als reelle Matrix der doppelten Größe. Die Bedingung $A^T A = 1_{2n}$ impliziert, dass diese eine unitäre Matrix ist. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n} \cong \mathrm{U}(n)$$

gilt. Wir werden im Folgenden die Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n}$ mit der unitären Gruppe $\mathrm{U}(n)$ identifizieren. Zur Erinnerung noch einige Eigenschaften der unitären Gruppe.

LEMMA 3.4. *Für alle $n \geq 1$ ist die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(n)$ eine reduktive, zusammenhängende Lie Gruppe der Dimension n^2.*

2. Riemannsche Geometrie und Symmetrische Räume

Wir wollen in diesem Abschnitt etwas Differentialgeometrie treiben. Wir werden definieren was ein Riemannscher symmetrischer Raum ist und zeigen, wie man aus einer halbeinfachen zusammenhängenden Lie Gruppe einen symmetrischen Raum gewinnt. Außerdem wollen wir uns mit Fixpunktmengen isometrischer Wirkungen auf Riemann-Mannigfaltigkeiten befassen.

2.1. Symmetrische Räume. Sei M eine glatte reelle Mannigfaltigkeit. Den Tangentialraum an M im Punkt p notieren wir mit T_pM, außerdem bezeichnen wir die Menge der glatten Vektorfelder auf M durch $\mathfrak{X}(M)$. Eine Riemann-Metrik auf M ist ein zweifach kovariantes Tensorfeld $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$, so dass gilt: Für alle $p \in M$ ist $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Riemann-Metrik g, so nennen wir (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine *Isometrie* $f : (M,g) \to (N,h)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist ein Diffeomorphismus, der die Riemann-Metrik erhält, d.h. $f^*(h) = g$. Anders ausgedrückt: für alle $p \in M$ und alle $X, Y \in T_pM$ gilt $h_{f(p)}(T_pf(X), T_pf(Y)) = g_p(X,Y)$. Wir erinnern daran, dass auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, für jedes $p \in M$, die Exponentialabbildung $\exp_p : U \subset T_pM \to M$ auf einer offenen Umgebung U von $0 \in T_pM$ definiert ist. Die Kurve $t \mapsto \exp_p(tX)$ ist die eindeutige Geodäte durch p mit Richtung $X \in T_pM$. Eine Teilmannigfaltigkeit $N \subset M$ heißt *total-geodätisch*, wenn für jeden Punkt $p \in N$ gilt: Ist γ eine Geodäte von M durch p, die bei p tangential an N ist, dann liegt γ schon komplett in N. Folgendes Lemma wird sich später als nützlich erweisen.

LEMMA 3.5. *Sei $f : (M,g) \to (M,g)$ eine Isometrie auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.*

(1) *Für alle $p \in M$ gilt $f \circ \exp_p(X) = \exp_{f(p)}(T_p f(X))$ für alle $X \in T_pM$ die im Definitionsbereich von $\exp_p$ liegen.*
(2) *Die Menge der Fixpunkte $M^f := \{p \in M \mid f(p) = p\}$ ist eine total-geodätische Teilmannigfaltigkeit von M.*

BEWEIS. Zu (1): Dies folgt aus der Tatsache, dass f Geodäten auf Geodäten abbildet.

Zu (2): Sei $p \in M^f$, wir müssen eine bei p zentrierte Karte $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ finden, sodass es einen linearen Teilraum $F \subseteq \mathbb{R}^m$ gibt mit $M^f \cap \varphi(U) = \varphi(U \cap F)$. Die Tangentialabbildung von f bei p ist ein linearer Isomorphismus $T_pM \xrightarrow{\cong} T_pM$. Sei $F = \{\, x \in T_pM \mid T_pf(x) = x \,\}$ die Menge der Fixpunkte der Tangentialabbildung. F ist ein linearer Unterraum von T_pM. Es gibt eine offene Umgebung U' von $0 \in T_pM$ und eine offene Umgebung N' von p in M, sodass $\exp_p : U' \to N'$ ein Diffeomorphismus ist. Wir wählen eine etwas kleinere offene Umgebung $U \subseteq U'$ von 0, sodass $T_pf(U) \subseteq U'$ gilt. Es sei $N = \exp_p(U)$. Dies ist die gesuchte Karte, wenn wir zeigen: $\exp_p(U \cap F) = N \cap M^f$. Sei $q \in N \cap M^f$. Es gibt $y \in U$ mit $q = \exp_p(y)$. Wegen (1) gilt: $q = f(q) = f(\exp_p(y)) = \exp_p(T_pf(y))$ und wir schließen $y \in F$, denn $T_pf(y) = y \in U'$. Genauso: Ist $y \in F \cap U$, so ist $q := \exp_p(y)$ ein Fixpunkt von f, denn $f(q) = f(\exp_p(y))) = \exp_p(T_pf(y)) = q$. Weiter sehen wir, dass M^f total-geodätisch ist: Sei γ eine Geodäte mit $\gamma(0) = p \in M^f$ und $x = \gamma'(0) \in F$. Wir müssen zeigen, dass γ vollständig in M^f liegt. Es gilt aber $\gamma(t) = \exp_p(tx)$ mit $tx \in F$, folglich liegt γ in M^f. □

Mit dem selben Argument sieht man, dass auch die Fixpunkte M^F einer Menge F von Isometrien eine Teilmannigfaltigkeit bilden.

Eine Isometrie $f : (M,g) \to (M,g)$ heißt *involutiv*, wenn $f^2 = \mathrm{id}_M$ aber $f \neq \mathrm{id}_M$ gilt.

DEFINITION 3.6. Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *Riemannscher symmetrischer Raum*, wenn es für alle $p \in M$ eine involutive Isometrie s_p von M gibt, sodass p ein isolierter Fixpunkt von s_p ist.

Mit Lemma 3.5 sieht man sehr leicht, dass eine solche involutive Isometrie lokal bei p einfach alle Geodäten umkehrt. Es gilt also $T_ps_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$. Da eine detaillierte Behandlung symmetrischer Räume den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, verweisen wir den Leser mit allen weitergehenden Fragen zu Helgason [**3**]. Bei Michor [**6**, 28.5] findet man eine nützliche Liste wichtiger Eigenschaften symmetrischer Räume. Ein Riemannscher symmetrischer Raum ist immer eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h., M ist mit der von g induzierten Metrik d_g ein vollständiger metrischer Raum. Äquivalent dazu ist nach Hopf und Rinov, dass alle Geodäten „unendlich lang“ sind. Des Weiteren wirkt die Gruppe der Isometrien immer transitiv auf einem Riemannschen symmetrischen Raum.

Uns interessiert im Folgenden nur eine bestimmte „Art“ symmetrischen Raumes. Wir werden sehen, dass man zu jeder halbeinfachen Lie Gruppe einen symmetrischen Raum assoziieren kann.

2.2. Halbeinfache Lie Gruppen und symmetrische Räume. Ist G eine halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppe mit endlichem Zentrum und ist K eine maximal kompakte Untergruppe von G, so kann man dem homogenen Raum ${}_K\backslash^{G}$ auf natürliche Weise die Struktur eines Riemannschen symmetrischen Raumes geben. Dies wollen wir hier erläutern. Dazu müssen wir allerdings ein wenig ausholen.

Ist $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie Algebra, so sei $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$, definiert durch $\mathrm{ad}(X)(Y) := [X, Y]$. Hier bezeichnet übrigens $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}$ die Menge der linearen Endomorphismen von $\mathfrak{g}$. Diese bildet mit der Kommutator-Klammer eine Lie Algebra und ad ist diesbezüglich ein Homomorphismus von Lie Algebren. Das Bild von ad liegt immer in der Lie Teilalgebra aller Derivationen auf $\mathfrak{g}$ (siehe Serre [**13**, I.Thm.3]). Mit der adjungierten Darstellung definieren wir die *Killing-Form* $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ durch $B(X, Y) := \mathsf{Tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$. Die Killing-Form ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ mit nützlichen Eigenschaften:

- Ist α ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$, so gilt $B(\alpha(X), \alpha(Y)) = B(X, Y)$.
- Für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ gilt $B(X, [Y, Z]) = B(Y, [Z, X]) = B(Z, [X, Y])$.

Diese Eigenschaften sind sehr einfach zu beweisen. Details findet man bei Helgason [**3**, S.121]. Einen Lie Algebren Automorphismus $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ der Ordnung zwei nennen wir eine *Involution* auf $\mathfrak{g}$.

Definition 3.7. Eine Involution θ auf einer reellen halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *Cartan Involution*, wenn die symmetrische Bilinearform

$$B_\theta(X, Y) \;:=\; -B(X, \theta(Y))$$

positiv definit ist.

Theorem 3.8. *Jede reelle halbeinfache Lie Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt eine Cartan Involution θ. Diese induziert eine Zerlegung von $\mathfrak{g}$*

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

in die beiden Eigenräume zum Eigenwert 1 bzw. -1. Die Killing-Form B ist eingeschränkt auf $\mathfrak{k}$ negativ definit und eingeschränkt auf $\mathfrak{p}$ positiv definit. Die Räume $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ stehen orthogonal bzgl. der Killing-Form. Weiter gilt

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{k}$ eine Lie Teilalgebra von $\mathfrak{g}$.

Beweis. Dies findet man bei Knapp [**5**, S.354 ff.] und bei Helgason [**3**, S.156 ff.]. □

Diese Zerlegung findet natürlich seine Entsprechung auf dem Niveau der Lie Gruppen. Folgenden Satz aus [**5**] werden wir häufig benötigen und zitieren ihn deshalb ausführlich

Theorem 3.9 (Theorem 6.31 in [**5**]). *Sei G eine zusammenhängende halbeinfache Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Sei θ eine Cartan Involution auf $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die induzierte Zerlegung von $\mathfrak{g}$. Sei K die eindeutige zusammenhängende (virtuelle) Lie Untergruppe von G mit Lie Algebra $\mathfrak{k}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Es gibt einen involutiven Lie Gruppen Automorphismus $\Theta : G \to G$ mit $\Theta' = \theta$.*
(2) *K ist die Gruppe der Fixpunkte von Θ; insbesondere ist K abgeschlossen*
(3) *Die Abbildung $K \times \mathfrak{p} \to G$ definiert durch $(k, X) \mapsto k \exp(X)$ ist ein Diffeomorphismus.*

(4) *K enthält das Zentrum von $Z(G)$ von G und K ist genau dann kompakt, wenn $Z(G)$ endlich ist. In diesem Fall ist K eine maximale kompakte Untergruppe.*

Den Automorphismus $\Theta : G \to G$ nennen wir ebenfalls *Cartan Involution.*

BEISPIEL 3.10. (1) Auf der Lie Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $A \mapsto (A^T)^{-1}$ eine Cartan Involution. Auf der Lie Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathsf{Tr}(X) = 0 \}$ ist die entsprechende Cartan Involution durch $X \mapsto -X^T$ gegeben. Die Gruppe der Fixpunkte K ist die spezielle orthogonale Gruppe SO_n.
(2) Auf der Lie Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ ist die Abbildung $A \mapsto (A^*)^{-1}$ eine Cartan Involution. Die Gruppe der Fixpunkte ist $K = \mathrm{Sp}(n)$. Ganz wie in (1) ist die Abbildung $X \mapsto -X^*$ die Cartan Involution auf der Lie Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid \mathrm{Re}(\mathsf{Tr}(X)) = 0 \}$.

Wir sind nun in der Lage zu beweisen, dass der homogene Raum $K \backslash G$ der Rechtsnebenklassen ein symmetrischer Raum ist, wenn die Voraussetzungen von Theorem 3.9 erfüllt sind. Es sei daran erinnert: der homogene Raum $K \backslash G$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim G - \dim K$. Die kanonische Abbildung $\pi : G \to K \backslash G$ ist eine surjektive Submersion. Des Weiteren ist die Abbildung $\rho : K \backslash G \times G \to K \backslash G$ mit $(x, g) \mapsto xg$ glatt. Wir verwenden die Notation $\rho^g : K \backslash G \to K \backslash G$ für die Rechtstranslation mit dem Element $g \in G$.

SATZ 3.11. *Sei G eine halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die Cartan Zerlegung bzgl. einer Cartan Involution $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Sei $\Theta : G \to G$ die zugehörige Cartan Involution auf G und sei K die Gruppe der Fixpunkte von Θ.*

Die Killing-Form B von $\mathfrak{g}$ induziert auf natürliche Weise eine rechtsinvariante Riemann-Metrik Q auf $K \backslash G$. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(K \backslash G, Q)$ ist ein symmetrischer Raum.

BEWEIS. Sei $X := K \backslash G$. Wir erklären zunächst die einfache Idee hinter dem Beweis. Die Killing-Form B ist eingeschränkt auf $\mathfrak{p}$ positiv definit. Es bezeichne e das neutrale Element in G und $o = \pi(e)$. Die Tangentialabbildung $T_e\pi : \mathfrak{g} \to T_oX$ hat Kern $\mathfrak{k}$ und induziert einen Isomorphismus $\mathfrak{p} \xrightarrow{\cong} T_oX$. Damit übertragen wir B auf diesen Tangentialraum und müssen dieses nur noch mit Rechtstranslationen auf X verteilen. Die involutive Isometrie mit isoliertem Fixpunkt o ist dann schnell gefunden: wir ziehen einfach Θ runter auf X.

Wir notieren die Umkehrfunktion zum erwähnten Isomorphismus $\mathfrak{p} \xrightarrow{\cong} T_oX$ mit $\alpha : T_oX \xrightarrow{\cong} \mathfrak{p}$. Es gilt $T_e\pi \circ \alpha = \mathrm{id}_{T_oX}$ und $\alpha \circ (T_e\pi)_{|\mathfrak{p}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{p}}$. Sei $y \in X$ und sei $g \in G$ mit $yg = \rho^g(y) = o$. Wir definieren die Riemann-Metrik Q im Tangentialraum an X in o durch

$$Q_o(\eta, \xi) := B(\alpha(\eta), \alpha(\xi))$$

für alle $\eta, \xi \in T_oX$. Und dann definieren wir weiter

$$Q_y(\eta, \xi) := Q_o(T_y\rho^g(\eta), T_y\rho^g(\xi))$$

für alle $\eta, \xi \in T_yX$. Da g nicht eindeutig ist, müssen wir zeigen, dass dies wohldefiniert ist. Dazu überlegen wir uns Folgendes: ist $k \in K$, so haben wir die Identität $\rho^{k^{-1}} \circ \pi = \pi \circ \kappa_k$. Wobei $\kappa_k : G \to G$ die Konjugation mit k bezeichne, d.h. $\kappa_k(g) = kgk^{-1}$. Durch Differenzieren erhalten wir:

$$T_o\rho^{k^{-1}} \circ T_e\pi = T_e\pi \circ \mathrm{Ad}(k). \tag{2.1}$$

Hier bezeichnet $\mathrm{Ad}(k)$ die Tangentialabbildung der Konjugation. $\mathrm{Ad}(k) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist ein Lie Algebren Automorphismus. Die Identität $\Theta \circ \kappa_k = \kappa_k \circ \Theta$ liefert durch Differenzieren:

$$\theta \circ \mathrm{Ad}(k) \;=\; \mathrm{Ad}(k) \circ \theta.$$

Insbesondere sehen wir, dass $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ beide $\mathrm{Ad}(k)$ invariant sind. Somit folgt aus Gleichung (2.1) auch

$$\alpha \circ T_o \rho^{k^{-1}} \;=\; \mathrm{Ad}(k) \circ \alpha. \tag{2.2}$$

Nun ist es leicht einzusehen, dass Q wohldefiniert ist. Denn ist $yg = o = yh$ mit $g, h \in G$, so gibt es ein $k \in K$ mit $hk^{-1} = g$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Q_o(T_y\rho^g(\eta), T_y\rho^g(\xi)) \;&=\; Q_o(T_y(\rho^{k^{-1}} \circ \rho^h)(\eta), T_y(\rho^{k^{-1}} \circ \rho^h)(\xi)) \\ &=\; Q_o(T_o\rho^{k^{-1}} \circ T_y\rho^h(\eta), T_o\rho^{k^{-1}} \circ T_y\rho^h(\xi)) \\ &\overset{(2.2)}{=}\; B(\mathrm{Ad}(k) \circ \alpha(T_y\rho^h(\eta)), \mathrm{Ad}(k) \circ \alpha(T_y\rho^h(\xi))) \\ &=\; B(\alpha(T_y\rho^h(\eta)), \alpha(T_y\rho^h(\xi))) \\ &=\; Q_o(T_y\rho^h(\eta), T_y\rho^h(\xi)), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Zeile aus der Invarianz von B unter Lie Algebren Automorphismen folgt.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass diese Riemann-Metrik rechtsinvariant ist. Sei $g \in G$, wir müssen $(\rho^g)^*Q = Q$ zeigen. Sei $y \in X$ und $h \in G$ mit $yh = o$, so sehen wir direkt:

$$\begin{aligned} Q_{yg}(T_y\rho^g(\eta), T_y\rho^g(\xi)) \;&=\; Q_o(T_{yg}\rho^{g^{-1}h} \circ T_y\rho^g(\eta), T_{yg}\rho^{g^{-1}h} \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &=\; Q_o(T_y\rho^h(\eta), T_y\rho^h(\xi)) \\ &=\; Q_y(\eta, \xi) \end{aligned}$$

für alle $\eta, \xi \in T_yX$. Insbesondere sind die Abbildungen ρ^g Isometrien auf X.

Wir wollen jetzt zeigen, dass (X, Q) ein symmetrischer Raum ist. Dazu finden wir zunächst eine involutive Isometrie s_o mit isoliertem Fixpunkt o. Haben wir diese gefunden, so setzen wir $s_y = \rho^{g^{-1}} \circ s_o \circ \rho^g$ für ein beliebiges $g \in G$ mit $yg = o$. Wir definieren s_o durch die Gleichung $s_o \circ \pi = \pi \circ \Theta$. Dies ist wohldefiniert, denn ist $\pi(g) = \pi(h)$ so gibt es ein $k \in K$ mit $g = kh$. Also gilt $\pi(\Theta(g)) = \pi(\Theta(kh)) = \pi(k\Theta(h)) = \pi(\Theta(h))$. Weiter ist s_o glatt, weil π eine surjektive Submersion ist. Offensichtlich ist s_o auch involutiv. Wir müssen nun zeigen, dass s_o eine Isometrie mit isoliertem Fixpunkt o ist. Anhand der definierenden Gleichung sehen wir, dass $s_o \circ \rho^g = \rho^{\Theta(g)} \circ s_o$ gilt. Durch Differenzieren der Identität $s_o \circ \pi = \pi \circ \Theta$ sehen wir

$$T_o s_o \circ T_e\pi \;=\; T_e\pi \circ \theta$$

und weil θ den Raum $\mathfrak{p}$ invariant lässt auch

$$\alpha \circ T_o s_o \;=\; \theta \circ \alpha.$$

Nun stellen wir für alle $y \in X$ und $g \in G$ mit $yg = o$ fest, dass

$$\begin{aligned} Q_{s_o(y)}(T_y s_o(\eta), T_y s_o(\xi)) \;&=\; Q_o(T_{s_o(y)}\rho^{\Theta(g)} \circ T_y s_o(\eta), T_{s_o(y)}\rho^{\Theta(g)} \circ T_y s_o(\xi)) \\ &=\; Q_o(T_o s_o \circ T_y\rho^g(\eta), T_o s_o \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &=\; B(\theta \circ \alpha \circ T_y\rho^g(\eta), \theta \circ \alpha \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &=\; B(\alpha \circ T_y\rho^g(\eta), \alpha \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &=\; Q_y(\eta, \xi) \end{aligned}$$

für alle $\eta, \xi \in T_yX$ gilt. Wegen $T_o s_o = -\operatorname{id}_{T_oX}$ ist 0 ein isolierter Fixpunkt im Tangentialraum und damit o ein isolierter Fixpunkt von s_o (siehe Lemma 3.5). $\square$

Dieser Satz ist eine für unsere Zwecke modifizierte Version von Proposition IV 3.4 bei Helgason [**3**].

BEMERKUNG 3.12. Falls G nicht kompakt ist, sagt man die gerade konstruierten symmetrischen Räume $K\backslash G$ sind vom *nicht-kompakten Typ*. Ist G kompakt, so heißt $K\backslash G$ symmetrischer Raum vom *kompakten Typ*. Es ist sehr nützlich zu wissen, dass symmetrische Räume vom nicht-kompakten Typ überall eine negative Schnittkrümmung besitzen. Die symmetrischen Räume vom kompakten Typ hingegen besitzen eine überall positive Schnittkrümmung (siehe Helgason [**3**, V §3]).

Uns interessieren im Folgenden hauptsächlich die symmetrischen Räume nicht-kompakten Typs. Diese sind vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, mit negativer Schnittkrümmung. Außerdem sehen wir durch die Cartan Zerlegung in Theorem 3.9, dass ein solcher Raum diffeomorph zu $\mathfrak{p}$ ist. Insbesondere sind diese Räume einfach zusammenhängend. Den folgenden nützlichen Satz übernehmen wir ohne Beweis von Helgason [**3**].

THEOREM 3.13. *Es sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung. Weiter sei K eine kompakte Lie Gruppe mit einer glatten Wirkung $K \times M \to M$. Falls K durch Isometrien auf M wirkt, haben die Elemente von K einen gemeinsamen Fixpunkt.*

BEWEIS. Helgason [**3**, S.75] Kapitel I, §13, Theorem 13.5. $\square$

Nun können wir uns beruhigt den zwei symmetrischen Räumen zuwenden, die uns im Folgenden interessieren.

BEISPIEL 3.14. (1) Sei $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Es ist uns bereits bekannt, dass G halbeinfach ist. Außerdem kennen wir eine Cartan Involution $A \mapsto (A^T)^{-1}$ auf G. Die Gruppe K ist die spezielle lineare Gruppe SO_n. Wir erhalten also auf $\mathrm{SO}_n\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ die Struktur eines symmetrischen Raumes vom nicht-kompakten Typ. Die Dimension dieses Raumes als reelle Mannigfaltigkeit ist $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.
(2) Sei $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$. G ist bekanntlich halbeinfach und wir haben eine Cartan Involution gegeben durch $A \mapsto (A^*)^{-1}$. Es ist also $K = \mathrm{Sp}(n)$. Der symmetrische Raum $X = \mathrm{Sp}(n)\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ ist somit vom nicht-kompakten Typ. Seine Dimension ist $n(2n-1)-1$.

2.3. Isometrische Wirkungen auf symmetrischen Räumen. Nachdem wir gerade die symmetrischen Räume kennengelernt haben, wollen wir nun isometrische Wirkungen auf diesen Räumen besprechen. Starten wir mit einem Beispiel, welches auch aufzeigt, wozu wir dies später benötigen. Wir haben zu Beginn dieses Kapitels festgestellt, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ die Gruppe der reellen Punkte der algebraischen Gruppe $\mathrm{SL}_n(H)$ ist, sofern die Quaternionenalgebra H über $\mathbb{R}$ verzweigt. Weiter haben wir die durch Konjugation, Transposition, Inversion gegebene Abbildung $\tau : \mathrm{SL}_n(H) \to \mathrm{SL}_n(H)$ nach $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ hochgehoben und festgestellt, dass τ auch dort durch die selbe Vorschrift gegeben ist. τ ist in diesem Fall eine Cartan Involution auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$. Insbesondere lässt diese die maximal kompakte Untergruppe $K = \mathrm{Sp}(n)$ invariant, d.h. $\tau(\mathrm{Sp}(n)) \subseteq \mathrm{Sp}(n)$. Damit induziert sie eine glatte Abbildung $\tilde{\tau} : X \to X$ auf dem symmetrischen Raum $X = \mathrm{Sp}(n)\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$. Da τ hier die Cartan Involution ist, gilt $\tilde{\tau} = s_o$ wie wir im Beweis von Satz 3.11 gesehen haben. Also ist $\tilde{\tau}$ eine Isometrie auf X. Die Wirkung der zweielementigen Gruppe auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ durch τ induziert also eine *isometrische* Wirkung der zweielementigen Gruppe auf X.

Da im Falle einer über $\mathbb{R}$ zerfallenden Quaternionenalgebra H, die Abbildung τ keine Cartan Involution ist, müssen wir uns überlegen, ob wir trotzdem eine isometrische Wirkung auf X erhalten.

LEMMA 3.15. *Sei G eine halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppe mit Cartan Involution $\Theta : G \to G$ und sei K die Gruppe der Fixpunkte von Θ. Ist $f : G \to G$ ein Isomorphismus von Lie Gruppen mit der Eigenschaft $f \circ \Theta = \Theta \circ f$, so induziert f eine Isometrie $\tilde{f} : X \to X$ auf dem symmetrischen Raum $X = K\backslash G$.*

BEWEIS. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Satz 3.11.

Zunächst stellt man fest, dass aufgrund der Identität $f \circ \Theta = \Theta \circ f$ die Gruppe K von f invariant gelassen wird: Ist $k \in K$, so gilt $\Theta(f(k)) = f(k)$ und somit $f(k) \in K$. Also induziert f eine Abbildung $\tilde{f} : X \to X$ mit $\tilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$. Da π eine surjektive Submersion ist, folgt die Glattheit von $\tilde{f}$. Weiter ist f ein Isomorphismus, also induziert die Umkehrabbildung von f ein Inverses zu $\tilde{f}$. Das heißt, $\tilde{f}$ ist ein Diffeomorphismus. Bleibt zu zeigen, dass er die Riemann-Metrik erhält.

Durch Differenzieren der Gleichung $f \circ \Theta = \Theta \circ f$ erhalten wir ein infinitissimales Analogon: $f' \circ \theta = \theta \circ f'$. Insbesondere lässt $f' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ den Teilraum $\mathfrak{p}$ invariant. Damit erhalten wir aus der Identität $T_o\tilde{f} \circ T_e\pi = T_e\pi \circ f'$ auch

$$\alpha \circ T_o\tilde{f} = f' \circ \alpha.$$

Nun führen wir die gleiche Rechnung wie im Beweis von Satz 3.11 durch:

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{f}(y)}(T_y\tilde{f}(\eta), T_y\tilde{f}(\xi)) &= Q_o(T_{\tilde{f}(y)}\rho^{f(g)} \circ T_y\tilde{f}(\eta), T_{\tilde{f}(y)}\rho^{f(g)} \circ T_y\tilde{f}(\xi)) \\ &= Q_o(T_o\tilde{f} \circ T_y\rho^g(\eta), T_o\tilde{f} \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &= B(f' \circ \alpha \circ T_y\rho^g(\eta), f' \circ \alpha \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &= B(\alpha \circ T_y\rho^g(\eta), \alpha \circ T_y\rho^g(\xi)) \\ &= Q_y(\eta, \xi) \end{aligned}$$

für alle $y \in X$, $\eta, \xi \in T_yX$ und $g \in G$ mit $yg = o$. Wir schließen, dass $\tilde{f}$ eine Isometrie ist. □

BEISPIEL 3.16. Betrachten wir die folgende Situation: Es sei $G = \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ mit Cartan Involution $\Theta : G \to G$ gegeben durch $A \mapsto (A^T)^{-1}$. Es ist also $K = \mathrm{SO}_{2n}$ die Gruppe der Fixpunkte. Wir betrachten den involutiven Automorphismus $\tau : \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ definiert durch $A \mapsto u(A^T)^{-1}u^{-1}$. Wobei wieder $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die symplektische Matrix bezeichnet. Wie bereits erwähnt, ist dies keine Cartan Involution auf $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. Es gilt aber $\Theta \circ \tau = \tau \circ \Theta$, denn für alle $A \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ hat man

$${}^{\tau}\Theta(A) = uAu^{-1} = (uA^{-1}u^{-1})^{-1} = ((u(A^T)^{-1}u^{-1})^T)^{-1} = \Theta({}^{\tau}A),$$

weil $u^T = u^{-1} = -u$ gilt. Mit Lemma 3.15 sehen wir somit, dass τ eine Isometrie $\tilde{\tau} : X \to X$ induziert.

Wir werden Lemma 3.15 oft verwenden. Um die Notation nicht zu überladen, werden wir die Tilde $\tilde{\ }$ über den induzierten Isometrien immer weglassen. Das heißt, $\tau : \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ induziert eine Isometrie $X \to X$, welche wir ebenfalls τ nennen werden.

2.4. Fixpunkte isometrischer Wirkungen. Sei im ganzen Abschnitt, wie gehabt, G halbeinfach und zusammenhängend, sowie $K \subset G$ die Fixpunktgruppe der Cartan Involution Θ. Es sei weiter F eine endliche Gruppe, welche durch Isomorphismen von Lie Gruppen von links auf G wirke. Für diese Wirkung $F \times G \to G$ verwenden wir die Notation $(f, g) \mapsto {}^f g$. Wir nehmen außerdem immer an, dass alle $f \in F$ mit der Cartan Involution vertauschen. In diesem Fall erhalten wir auch eine Wirkung von F auf K. Die Inklusion $\iota : K \to G$ liefert uns folglich eine Abbildung (siehe Appendix A Abschnitt 3)

$$\iota_* : \ H^1(F, K) \ \longrightarrow \ H^1(F, G).$$

In vielen Fällen ist diese Abbildung eine Bijektion (siehe z.B. Rohlfs [**9**, Lemma 1.4]). Wir werden dies, der Darstellung von Rohlfs folgend, etwas allgemeiner beweisen.

SATZ 3.17. *Es sei G eine halbeinfache, zusammenhängende und nicht kompakte Lie Gruppe. Weiter seien K und F wie oben. Dann ist die Abbildung*

$$\iota_* : \ H^1(F, K) \ \xrightarrow{\simeq} \ H^1(F, G).$$

eine Bijektion.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die Surjektivität der Abbildung ι_*. Sei dazu $a = (a_f)_{f \in F}$ ein Kozykel für $H^1(F, G)$. Wir werden zeigen, dass seine Klasse im Bild liegt. Nach Voraussetzung wirkt F auf G durch Gruppenisomorphismen, die mit der Cartan Involution vertauschen. Mit Lemma 3.15 erhalten wir eine isometrische Wirkung $F \times X \to X$ die wir mit $(f, x) \mapsto {}^f x$ notieren. Wir betrachten die mit a verdrehte Wirkung auf X, diese ist gegeben durch $(f, x) \mapsto {}^{f(a)}x := {}^f x a_f^{-1}$. Da auch Rechtstranslationen auf X Isometrien sind, handelt es sich hierbei um eine isometrische Wirkung. Da G nicht kompakt ist, ist X vom nicht-kompakten Typ. Nach Theorem 3.13 besitzt die verdrehte Wirkung einen Fixpunkt $x \in X$. Es gilt also $x a_f = {}^f x$ für alle $f \in F$. Sei $g \in G$ ein Element welches x nach o verschiebt, d.h. $xg = o$. Anders ausgedrückt, haben wir die Gleichheit $Kg^{-1}a_f = K\,{}^f(g^{-1})$. Wir stellen fest, dass $k_f := g^{-1} a_f\, {}^f g$ in K liegt. Die Klasse des Kozykels $(k_f)_{f \in F}$ in $H^1(F, K)$ ist folglich ein Urbild der vorgegebenen Klasse.

Nun zeigen wir die Injektivität. Sind $(h_f)_{f \in F}$ und $(k_f)_{f \in F}$ zwei Kozykel in $Z^1(F, K)$ deren Klassen unter ι_* das selbe Bild haben, dann gibt es ein $g \in G$ mit

$$g^{-1} h_f\, {}^f g = k_f \qquad \text{für alle } f \in F. \tag{2.3}$$

Nach Theorem 3.9 ist die Abbildung $K \times \mathfrak{p} \to G$ mit $(k, \eta) \mapsto k \exp(\eta)$ ein Diffeomorphismus. Wir setzen $P := \exp(\mathfrak{p})$ und stellen Folgendes fest:

(1) F lässt P invariant, d.h. ${}^f p \in P$ für alle $f \in F$ und $p \in P$. Dies folgt aus der Tatsache, dass alle f mit der Cartan Involution vertauschen.

(2) Für alle $k \in K$ ist $k^{-1} P k = P$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\mathfrak{p}$ ein $\mathrm{Ad}(k)$ invarianter Teilraum in der Lie Algebra ist.

Schreibe nun $g = kp$ mit $k \in K$ und $p \in P$. Mit (2.3) erhält man

$$k_f \ = \ p^{-1} k^{-1} h_f\, {}^f k\, {}^f p \ = \ k^{-1} h_f\, {}^f k p'\, {}^f p$$

mit einem $p' \in P$. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $G = KP$ sieht man $p'\, {}^f p = e$ und $k_f = k^{-1} h_f\, {}^f k$. Die Kozykel $(h_f)_f$ und $(k_f)_f$ sind also Repräsentanten der selben Klasse in $H^1(F, K)$. □

Wir betrachten weiterhin die gleiche Situation. Wir haben gesehen, dass die Wirkung von F auf G eine isometrische Wirkung von F auf dem symmetrischen Raum X induziert. Im Beweis des Satzes haben wir weiterhin gesehen, dass auch die verdrehten

Wirkungen bzgl. eines Kozykels isometrisch sind. Aus Lemma 3.5 wissen wir, dass die Menge der Fixpunkte einer solchen Wirkung eine total-geodätische Teilmannigfaltigkeit bildet. Wir wollen nun die Struktur dieser Fixpunkt-Mannigfaltigkeiten untersuchen. Wir notieren die Wirkung von $F \times X \to X$ mit $(f, x) \mapsto {}^f x$. Die mit einem Kozykel $b = (b_f)_{f \in F}$ verdrehte Wirkung bezeichnen wir mit $(f, x) \mapsto {}^{f(b)}x := {}^f x b_f^{-1}$. Es bezeichne $X(b) = \{ x \in X \mid \forall f \in F \ {}^{f(b)}x = x \}$ die Menge der Fixpunkte der mit b verdrehten Wirkung. Die Struktur dieser Fixpunktmengen möchten wir nun untersuchen. Im nächsten Lemma werden wir dies ganz allgemein tun und später wollen wir vorallem wissen, wie stark diese Mengen von dem Kozykel b abhängen.

LEMMA 3.18. *Es sei $b = (b_f)_f$ ein beliebiger Kozykel für $H^1(F, G)$. Ist G nicht kompakt, so ist $X(b)$ eine nicht-leere, zusammenhängende und total-geodätische Teilmannigfaltigkeit von X.*

BEWEIS. Da auch die verdrehte Wirkung isometrisch ist, sind die $X(b)$ total-geodätische Teilmannigfaltigkeiten (siehe Lemma 3.5). Ist G nicht kompakt, so ist X ein symmetrischer Raum nicht-kompakten Typs. Wir können somit aus Theorem 3.13 schließen, dass die Mengen $X(b)$ nicht leer sind. Um zu zeigen, dass $X(b)$ zusammenhängend ist, greifen wir auf Theorem 13.3 , I.§13 aus [**3**] zurück. Da X eine einfach zusammenhängende und vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittkrümmung ist, liefert uns dieser Satz, dass für jeden Punkt $p \in X$ die Exponentialabbildung $\exp_p : T_pM \to M$ ein Diffeomorphismus ist. Sind also $p, q \in X(b)$, so gibt es eine eindeutige Geodäte $\gamma : t \mapsto \exp_p(t\eta)$, welche p mit q verbindet und $q = \exp_p(\eta) = \gamma(1)$ erfüllt. Wir werden zeigen, dass diese Geodäte komplett in $X(b)$ liegt. Da q ein Fixpunkt der verdrehten Wirkung ist, ist η ein Fixpunkt der Ableitungen bei p. Hierzu verwenden wir, dass $\exp_p$ Diffeomorphismus ist. Damit muss aber die ganze Gerade $\mathbb{R}\eta$ aus Fixpunkten bestehen. Wir schließen, dass γ zur Gänze in $X(b)$ verläuft. $\square$

LEMMA 3.19. *Sind $a = (a_f)_f$ und $(b_f)_f$ äquivalente Kozykel für $H^1(F, G)$, so sind $X(a)$ und $X(b)$ diffeomorph.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es ein $g \in G$ mit $b_f = g^{-1} a_f {}^f g$. Wir behaupten, dass die Abbildung $x \mapsto xg$ den gesuchten Diffeomorphismus $X(a) \xrightarrow{\cong} X(b)$ liefert. Zunächst überprüfen wir die Wohldefiniertheit: Sei $x \in X(a)$, es gilt

$$ {}^{f(b)}(xg) \;=\; {}^f x \, {}^f g b_f^{-1} \;=\; {}^f x a_f^{-1} g \;=\; xg. $$

Wir sehen, dass xg ein Element von $X(b)$ ist. Die Umkehrabbildung ist offensichtlich durch $x \mapsto xg^{-1}$ gegeben. Weil $X(a)$ und $X(b)$ Teilmannigfaltigkeiten von X sind, können wir schließen, dass die betrachteten Abbildungen glatt sind. Dies folgt, weil sie Einschränkungen von glatten Abbildungen $X \to X$ sind. $\square$

Sei $b = (b_f)_{f \in F}$ ein Kozykel für $H^1(F, G)$. Wir betrachten nun die mit b verdrehte Wirkung von F auf G (siehe Appendix A). Diese ist gegeben durch $(f, g) \mapsto {}^{f(b)}g := b_f {}^f g b_f^{-1}$. Es bezeichne $G(b) = \{ g \in G \mid \forall f \in F \ {}^{f(b)}g = g \}$ die Untergruppe der Fixpunkte der verdrehten Wirkung. Diese ist offensichtlich abgeschlossen, also eine Lie Untergruppe von G. Falls alle b_f in K liegen, können wir auch die verdrehte Wirkung auf K betrachten. Durch Satz 3.17 wissen wir, dass wir in jeder Klasse in $H^1(F, G)$ einen Kozykel $(b_f)_f$ finden können, der $b_f \in K$ für alle $f \in F$ erfüllt. Des Weiteren wissen wir durch Lemma 3.19, dass es ausreicht sich auf diese Kozykel zu konzentrieren, wenn man die Struktur der $X(b)$ verstehen will. Das nächste Lemma erklärt uns diese

Struktur, wobei wir die Voraussetzung machen G habe endliches Zentrum, damit K kompakt ist (siehe Theorem 3.9).

LEMMA 3.20. *Es sei G eine halbeinfache, zusammenhängende, nicht kompakte Lie Gruppe mit endlichem Zentrum. Ist $b = (b_f)_{f\in F}$ ein Kozykel für $H^1(F,K)$ (d.h. $b_f \in K$ für alle f), dann gilt*

$$X(b) \;\cong\; {}_{K(b)}\backslash^{G(b)}.$$

Das Zeichen „$\cong$" steht hier für „diffeomorph".

BEWEIS. Sei $b = (b_f)_{f\in F}$ ein Kozykel mit $b_f \in K$ für alle $f \in F$. Wir bemerken zunächst, dass auch die mit b verdrehte Wirkung mit der Cartan Involution vertauscht: $\Theta({}^{f(b)}g) = \Theta(b_f\, {}^f g b_f^{-1}) = b_f\, {}^f\Theta(g) b_f^{-1}$. Der Grund ist, dass K die Gruppe der Fixpunkte von Θ ist. Wir notieren die erste nicht-abelsche Kohomologiemenge bezüglich der mit b verdrehten Wirkung mit $H^1(F_b,G)$ (bzw. $H^1(F_b,K)$). Durch die Inklusion $K \hookrightarrow G$ erhalten wir eine exakte Sequenz punktierter Mengen (siehe Lemma A.6)

$$1 \to K(b) \to G(b) \to X(b) \xrightarrow{\delta} H^1(F_b,K) \xrightarrow{\iota_*} H^1(F_b,G)$$

Aufgrund von Satz 3.17 ist ι_* bijektiv und somit δ trivial. Die glatte Wirkung von $G(b)$ auf $X(b)$ durch Rechtstranslationen ist also surjektiv. Es liegt $o = \pi(e)$ in $X(b)$, weil $b_f \in K$ für alle f. Der Stabilisator dieses Punktes (bzgl. der Rechtswirkung von $G(b)$) ist die Gruppe $K(b)$. Wir erhalten also eine bijektive glatte Abbildung $\varphi : {}_{K(b)}\backslash^{G(b)} \to X(b)$. Es bleibt zu zeigen, dass diese ein Diffeomorphismus ist.

Man beachte zunächst, dass die kanonische Projektion $\pi : G \to {}_K\backslash^G$ eine abgeschlossene Abbildung[2] ist. Dazu verwenden wir die Kompaktheit von K: Ist $A \subseteq G$ abgeschlossen, so ist bekanntlich auch $KA \subseteq G$ abgeschlossen. Wir schlussfolgern daraus, dass auch die Abbildung $\pi_{|G(b)} : G(b) \to X(b)$ abgeschlossen ist, weil $G(b)$ in G und $X(b)$ in X abgeschlossen sind. Damit sehen wir, dass die betrachtete Abbildung $\varphi : {}_{K(b)}\backslash^{G(b)} \to X(b)$ abgeschlossen ist. Sie ist also ein Homöomorphismus. Weiter ist φ eine Immersion (siehe [**6**, S.68, Thm. 6.4]). Da wir bereits wissen, dass die Abbildung φ^{-1} stetig ist, können wir wegen $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{X(b)}$ auf ihre Glattheit schließen. $\square$

3. Auftretende Fixpunktmannigfaltigkeiten unter der Wirkung von τ

Wir haben jetzt alle Utensilien beisammen, um dies auf die Fälle anzuwenden, die uns interessieren. Es sei nun immer $\mathfrak{c}_2$ die zweielementige Gruppe, welche auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ bzw. $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ via des (entsprechenden) Automorphismus τ operiere. Wie bereits in Beispiel 3.16 festgestellt, vertauscht τ mit der Cartan Involution. Die beiden Gruppen erfüllen alle im vorigen Abschnitt getroffenen Voraussetzungen. Wir betrachten die Gruppen $\mathrm{SL}_n(H)$ immer als Untergruppen von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ bzw. $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$. Dies geschieht über die in Abschnitt 1.1 erklärten Isomorphismen.

KOROLLAR 3.21. *Es sei H eine Quaternionenalgebra, welche über $\mathbb{R}$ verzweigt. Ist $(1,b)$ ein Kozykel für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ mit Signatur[3] $\mathrm{sig}(b) = (p,q)$, dann gilt*

$$X(b) \;\cong\; {}_{\mathrm{Sp}(p)\times\mathrm{Sp}(q)}\backslash^{\mathrm{Sp}(p,q)}.$$

Damit ist $X(b)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $4pq$.

[2] Abgeschlossen bedeutet hier: Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

[3] Hier meinen wir die Signatur aus Definition 1.35.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $(1, b)$ in der selben Kohomologieklasse wie der Kozykel $(1, I_{p,q})$ in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$. Mit Lemma 3.19 sehen wir also $X(b) \cong X(I_{p,q})$. Aber die Gruppe der Fixpunkte der verdrehten Wirkung ist (nach Definition) die Gruppe $\mathrm{Sp}(p, q)$. Es gilt offensichtlich $I_{p,q} \in \mathrm{Sp}(n)$ und wegen $\mathrm{Sp}(p, q) \cap \mathrm{Sp}(n) \cong \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$ folgt die erste Behauptung aus Lemma 3.20. Die Dimension rechnet man einfach aus: $\dim X(b) = n(2n + 1) - p(2p + 1) - q(2q + 1) = 4pq$. □

Wie wir in Korollar 1.39 festgestellt haben, besitzt jeder Kozykel eine eindeutige Signatur. Wir kennen also die Struktur aller möglichen auftretenden Fixpunktmannigfaltigkeiten unter den verdrehten Wirkungen.

Ein ähnliches Resultat wollen wir nun für Quaternionenalgebren beweisen, welche über $\mathbb{R}$ zerfallen. Zuerst möchten wir allerdings die Frage klären, wie viele Elemente $H^1(c_2, \mathrm{SL}_n(H))$ eigentlich besitzt. In Korollar 1.40 haben wir gesehen, dass die Kohomologiemenge ein- oder zweielementig ist. Außerdem finden wir dort ein Kriterium um dies herauszufinden: H^1 besteht aus einem Element genau dann, wenn es ein $A \in \mathrm{GL}_n(H)$ gibt mit $A^*A = 1_n$ und $\mathsf{nrd}(A) = -1$. Anders ausgedrückt heißt dies, es gibt Elemente in der Fixpunktgruppe von τ mit reduzierter Norm -1. Wir haben aber in unserem Fall eine Einbettung $\mathrm{GL}_n(H) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ unter welcher die Gruppe der Fixpunkte von τ gerade die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ ist. Es ist bekannt, dass alle Elemente der symplektischen Gruppe Determinante 1 haben. Wir schließen also, dass $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ aus zwei Elementen besteht. Man stellt leicht fest, dass ein Repräsentant der nicht-trivialen Klasse durch den Kozykel $(1, I_{n-1,1})$ gegeben ist. Dazu verwendet man einfach die Definition der Einhängungsabbildung $\delta : \{\pm 1\} \to H^1(c_2, \mathrm{SL}_n(H))$ (siehe Appendix A, Proposition A.7), den man aus der exakten Sequenz

$$1 \to SL_n(H) \to GL_n(H) \xrightarrow{\mathsf{nrd}} \mathbb{Q}^\times \to 1$$

erhält.

Es sind also diese zwei Arten von Fixpunktmannigfaltigkeiten $X(b)$ zu bestimmen. Mit Lemma 3.20 sieht man sofort, dass für alle Kozykel $(1, b)$ in der trivialen Klasse $X(b) \cong {}_{\mathrm{U}(n)}\backslash^{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$ gilt. Für Kozykel in der nicht-trivialen Klasse wollen wir zeigen, dass dies ebenfalls gilt.

Korollar 3.22. *Es sei H eine Quaternionenalgebra, welche über $\mathbb{R}$ zerfällt. Ist $(1, b)$ ein Kozykel für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$, so gilt*

$$X(b) \cong {}_{\mathrm{U}(n)}\backslash^{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}.$$

Insbesondere ist $X(b)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n + 1)$.

Beweis. Für alle Kozykel $(1, b)$ in der trivialen Klasse ist nichts zu zeigen. Sei also $(1, b)$ nicht kohomolog zu $(1, 1)$ bzgl. $\mathrm{SL}_n(H)$. Aufgrund von Proposition 1.37 sind diese Kozykel aber bzgl. $\mathrm{GL}_n(H)$ kohomolog. Das heißt, es gibt ein $g \in \mathrm{GL}_n(H)$ mit $g^{-1}b\,{}^\tau g = 1$. Aufgrund der Surjektivität der Abbildung $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SO}_{2n}) \to H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}))$ (Satz 3.17) gibt es ein $\tilde{b} \in \mathrm{SO}_{2n}$ und $h \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ mit $b = h^{-1}\tilde{b}\,{}^\tau h$. Beides zusammen ergibt $(hg)^{-1}\tilde{b}\,{}^\tau(hg) = 1$. Weil wir durch Lemma 3.19 $X(b) \cong X(\tilde{b})$ wissen, können wir zur Vereinfachung der Notation $b \in \mathrm{SO}_{2n}$ und $g^{-1}b\,{}^\tau g = 1$ mit $g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ annehmen. Sei $a \in \mathrm{O}_{2n}$ beliebig mit Determinante -1. Es gilt $(ga)^{-1}b\,{}^\tau(ga) = a^{-1}\,{}^\tau a$. Wegen $\det({}^\tau a) = \det a^{-1}$ ist $a^{-1}\,{}^\tau a$ ein Element der speziellen orthogonalen Gruppe. Mit Hilfe der Injektivität der Abbildung $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SO}_{2n}) \to H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}))$ sehen wir, dass die Kozykel $(1, b)$ und $(1, a^{-1}\,{}^\tau a)$ schon in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SO}_{2n})$ die gleiche Klasse beschreiben. Es gibt also ein $k \in \mathrm{SO}_{2n}$ mit $k^{-1}b\,{}^{\tau}k = a^{-1}\,{}^{\tau}a$. Wir setzen $c := ka^{-1} \in \mathrm{O}_{2n}$ und sehen

$$c^{-1}b\,{}^{\tau}c \;=\; 1.$$

Ist h ein Element der orthogonalen Gruppe, dann definiert die Konjugation κ_h einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$, welcher mit der Cartan Involution vertauscht. Wegen Lemma 3.15 induziert dieser eine Isometrie $\tilde{\kappa}_h : X \to X$. Wegen $\tau \circ \kappa_h = \kappa_{\tau(h)} \circ \tau$ gilt auch $\tau \circ \tilde{\kappa}_h = \tilde{\kappa}_{\tau(h)} \circ \tau$ als Abbildungen $X \to X$.

Wir behaupten, dass $\widetilde{\kappa_c}$ einen Diffeomorphismus $X(1) \to X(b)$ liefert. Sei $K = \mathrm{SO}_{2n}$ und $Kx \in X(1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} {}^{\tau(b)}\tilde{\kappa}_c(Kx) \;&=\; \tilde{\kappa}_{\tau(c)}(\,{}^{\tau}(Kx))b^{-1} \;=\; K\,{}^{\tau}cx(\,{}^{\tau}c)^{-1}b^{-1} \\ &=\; K\underbrace{{}^{\tau}cc^{-1}}_{\in K}cx(\,{}^{\tau}c)^{-1}b^{-1}cc^{-1} \;=\; Kcxc^{-1} \;=\; \tilde{\kappa}_c(Kx). \end{aligned}$$

Klarerweise ist $\tilde{\kappa}_c$ glatt und die Umkehrabbildung ist $\tilde{\kappa}_{c^{-1}}$. □

4. Spezielle geometrische Zykel

In diesem Abschnitt werden wir eine diskrete torsionsfreie Untergruppe $\Gamma \subset G$ auf dem symmetrischen Raum $X = K\backslash G$ durch Rechtstranslationen wirken lassen. Uns interessiert die Struktur des Bahnenraumes X/Γ als Mannigfaltigkeit. Weiter werden wir dann feststellen, dass (unter gewissen Annahmen) die betrachteten isometrischen Wirkungen $F \times X \to X$ auch Wirkungen auf X/Γ induzieren. Wir werden dann die Menge der Fixpunkte $(X/\Gamma)^F$ untersuchen. Dabei greifen wir auf eine Methode von Rohlfs zurück, indem wir die Zusammenhangskomponenten von $(X/\Gamma)^F$ mittels der Kohomologiemenge $H^1(F,\Gamma)$ parametrisieren. Rohlfs hat diese Zerlegung bereits in vielen konkreten Fällen untersucht, siehe [**8**], [**9**] und [**10**].

Es sei Γ eine Gruppe die von rechts auf einem topologischen Raum X wirkt. Wir nennen diese Wirkung *strikt diskontinuierlich*, wenn es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, sodass gilt:

$$U\gamma \cap U \neq \emptyset \implies \gamma = 1 \tag{4.1}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$.

Lemma 3.23. *Es sei G eine topologische Gruppe und K eine kompakte Untergruppe von G. Ist $\Gamma \subset G$ eine diskrete torsionsfreie Untergruppe von G, so wirkt Γ strikt diskontinuierlich auf $X = K\backslash G$ durch Rechtstranslationen. Insbesondere ist die kanonische Projektion $X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

Beweis. Es sei $x = Kg$ in X. Wir werden eine Umgebung U wie in (4.1) konstruieren.

Die Gruppe $g\Gamma g^{-1}$ ist isomorph zu Γ, also diskret und torsionsfrei. Folglich gilt

$$K \cap g\Gamma g^{-1} = \{1\}.$$

Wir wählen eine offene Menge $W \supset K$ mit $W \cap g\Gamma g^{-1} = \{1\}$. Dies ist möglich, weil Γ diskret ist. Betrachte die stetige Abbildung $\mu : G \times G \times G \to G$ gegeben durch $(g_1, g_2, g_3) \mapsto g_1g_2g_3$. Das Urbild von W unter μ ist offen und enthält $K \times K \times K$. Nach Wallaces Lemma gibt es, weil K kompakt ist, eine offene Umgebung V von K mit $V \times V \times V \subset \mu^{-1}(W)$. Durch Verkleinern können wir $V = V^{-1}$ annehmen. Insbesondere gilt $V^{-1}V^2 \cap g\Gamma g^{-1} = \{1\}$. Es bezeichne $\pi : G \to X$ die kanonische Projektion, diese ist stetig und offen. Wir behaupten $U := \pi(Vg)$ sei die gesuchte Umgebung von x. Die Menge U ist offensichtlich eine offene Umgebung von $x = Kg$. Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $U\gamma \cap U \neq \emptyset$, wir müssen $\gamma = 1$ zeigen. Es sei $Kv_1g\gamma = Kv_2g$ in diesem nicht-leeren Schnitt, dann gilt $v_1g\gamma = kv_2g$ für ein $k \in K$. Wir sehen also

$$g\gamma g^{-1} \;=\; v_1^{-1}kv_2 \;\in V^{-1}V^2$$

und damit $\gamma = 1$. □

Insbesondere ist eine solche Wirkung immer eine freie Wirkung. Das heißt, für alle $x \in X$ und alle $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$x\gamma = x \implies \gamma = 1.$$

Außerdem sehen wir: Wenn G eine Lie Gruppe ist, so erhalten wir auf X/Γ ebenfalls die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit der selben Dimension. Ist X einfach zusammenhängend (z.B. ein symmetrischer Raum vom nicht-kompakten Typ), so ist die Fundamentalgruppe von X/Γ bekanntlich isomorph zu Γ.

4.1. Zerlegung in Fixpunktkomponenten. Wir kehren nun zurück zu der Situation, die wir in Abschnitt 2.4 betrachtet haben. Es sei G halbeinfach, zusammenhängend, nicht kompakt mit endlichem Zentrum. Sei außerdem K die (kompakte) Fixpunktgruppe einer Cartan Involution Θ. Wir betrachten wieder die Linkswirkung $(f, g) \mapsto {}^f g$ einer endlichen Gruppe F auf G, welche mit der Cartan Involution verträglich ist. Auch die induzierte isometrische Wirkung von F auf $X = K\backslash G$ notieren wir mit $(f, x) \mapsto {}^f x$. Zusätzlich sei nun $\Gamma \subset G$ eine diskrete torsionsfreie Untergruppe. Wir setzen voraus, dass sie invariant unter der Wirkung von F ist. Anders ausgedrückt: Wir können die Wirkung von F auf G zu einer Wirkung von F auf Γ einschränken.

Wir stellen fest, dass die sich Linkswirkung von F auf X mit der Rechtswirkung von Γ auf X in folgendem Sinne verträgt: ${}^f(x\gamma) = {}^f x\, {}^f\gamma$ für alle $x \in X$, $f \in F$ und $\gamma \in \Gamma$. Also erhalten wir eine F Linkswirkung auf X/Γ, definiert durch

$${}^f(x\Gamma) := {}^f x\Gamma.$$

Uns interessiert im Folgenden die Menge der Fixpunkte dieser Wirkung:

$$(X/\Gamma)^F := \{\, y \in X/\Gamma \mid \forall\, f \in F \;\; {}^f y = y \,\}.$$

LEMMA 3.24. *Es sei $q : X \to X/\Gamma$ die kanonische Projektion. Weiter sei $b = (b_f)_{f\in F}$ ein Kozykel für $H^1(F, \Gamma)$, dann gilt:*

(1) *Das Bild von $X(b)$ unter q liegt in der Fixpunktmenge: $q(X(b)) \subseteq (X/\Gamma)^F$.*
(2) *Ist $c = (c_f)_f$ ein zu b (bzgl. Γ) kohomologer Kozykel, so gilt $q(X(b)) = q(X(c))$.*
(3) *Es gibt eine offene Umgebung U_b von $X(b)$ so, dass $U_b \cap X(c) = \emptyset$ für alle anderen Γ-Kozykel c gilt.*

BEWEIS. Zu (1): Es sei $x \in X(b)$, d.h. ${}^f x = xb_f$ für alle $f \in F$. Wegen $b_f \in \Gamma$ sieht man direkt ${}^f(x\Gamma) = xb_f\Gamma = x\Gamma$. Also ist $q(x) = x\Gamma$ ein Fixpunkt der Wirkung von F.

Zu (2): Es seien $c = (c_f)_f$ und $b = (b_f)_f$ kohomolog bzgl. Γ, dann gibt es $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma^{-1}b_f\, {}^f\gamma = c_f$ für alle $f \in F$. Aus Symmetriegründen genügt es, die Inklusion $q(X(b)) \subseteq q(X(c))$ zu zeigen. Sei $x \in X(b)$. Wir werden zeigen, dass $x\gamma$ ein Element von $X(c)$ ist. Dies sieht man durch folgende Rechnung

$${}^f(x\gamma) \;=\; {}^f x\, {}^f\gamma \;=\; xb_f\, {}^f\gamma \;=\; x\gamma c_f.$$

Also gilt $q(x) = q(x\gamma) \in q(X(c))$.

Zu (3): Betrachte die glatte Abbildung

$$\chi : X \to \prod_{f\in F} X \;\text{ definiert durch }\; x \mapsto (\,{}^f x b_f^{-1})_{f\in F}.$$

Es sei Δ die Diagonale in $\prod_{f\in F} X$. Offensichtlich gilt $X(b) = \chi^{-1}(\Delta)$. Nach Lemma 3.23 ist die Wirkung von Γ strikt diskontinuierlich. Es gibt also für alle $x \in X$ eine offene Umgebung V_x von x mit $V_x\gamma \cap V_x = \emptyset$ für alle $\gamma \neq 1$. Setze $W = \bigcup_{x\in X} V_x \times \cdots \times V_x$. Man stellt fest, dass dies eine offene Umgebung von Δ in $\prod_{f\in F} X$ ist. Folglich ist $U_b := \chi^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von $X(b)$. Sei c ein Kozykel für $H^1(F,\Gamma)$. Es wird gezeigt, dass aus $X(c) \cap U_b \neq \emptyset$ schon $c = b$ folgt. Sei $x \in X(c) \cap U_b$. Es gibt also ein $y \in X$, sodass $\chi(x) = ({}^f x b_f^{-1})_f \in V_y \times \cdots \times V_y$ gilt. Insbesondere liegt $x = {}^e x b_e^{-1}$ in V_y, wenn $e \in F$ das neutrale Element bezeichnet. Wir sehen also ${}^f x c_f^{-1} = x \in V_y$ für alle $f \in F$. Daraus folgt aber ${}^f x \in V_y c_f \cap V_y b_f$ für alle f. Nach Wahl der Mengen V_y können wir $c_f = b_f$ schließen. □

Wir definieren nun für eine beliebige Kohomologieklasse $\eta = [b] \in H^1(F,\Gamma)$, die Menge

$$\mathcal{F}(\eta) := q(X(b)).$$

Wegen (2) in Lemma 3.24 ist dies wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von b. Mit (1) sehen wir, dass $\mathcal{F}(\eta)$ nur aus Fixpunkten besteht.

PROPOSITION 3.25 (Rohlfs (1978), Satz 1.4 in [**8**]). *Für jede torsionsfreie, diskrete Untergruppe Γ gilt*[4]

$$(X/\Gamma)^F = \bigsqcup_{\eta\in H^1(F,\Gamma)} \mathcal{F}(\eta).$$

Des Weiteren sind die Fixpunktkomponenten $\mathcal{F}(\eta)$ genau die Zusammenhangskomponenten von $(X/\Gamma)^F$. Sie sind insbesondere abgeschlossen (in X/Γ) und nicht leer.

BEWEIS. Als erstes möchten wir erklären, warum die Vereinigung disjunkt ist. Seien dazu $b = (b_f)_{f\in F}$ und $c = (c_f)_{f\in F}$ zwei Kozykel für $H^1(F,\Gamma)$. Wir nehmen an es sei $q(X(b)) \cap q(X(c)) \neq \emptyset$ und zeigen, dass die Kozykel dann bereits in der selben Klasse liegen. Dies sieht man wie folgt: Nach Annahme existieren $x \in X(b)$ und $y \in X(c)$ mit $x\Gamma = y\Gamma$. Es gibt also $\gamma \in \Gamma$ so, dass $x = y\gamma$ ist. Man stellt somit fest, dass

$$y c_f\, {}^f\gamma = {}^f(y\gamma) = {}^f x = x b_f = y\gamma b_f$$

ist. Durch Lemma 3.23 wissen wir insbesondere, dass die Wirkung von Γ auf X frei ist. Damit sehen wir $c_f\, {}^f\gamma = \gamma b_f$ und schließen, dass c und b kohomolog sind.

Als nächstes möchten wir zeigen, dass wir wirklich alle Fixpunkte in einer der Mengen $\mathcal{F}(\eta)$ finden. Sei dazu $x\Gamma \in (X/\Gamma)^F$. Wir müssen einen Kozykel b konstruieren mit $x \in X(b)$. Da $x\Gamma$ ein Fixpunkt der F-Wirkung ist, gibt es für alle $f \in F$ genau ein $b_f \in \Gamma$ mit ${}^f x = x b_f$. Wir behaupten $b = (b_f)_f$ ist ein Kozykel. Es seien $s,t \in F$, dann gilt

$$x b_{st} = {}^{st}x = {}^s(x b_t) = x b_s\, {}^s b_t.$$

Aufgrund der Freiheit der Wirkung von Γ auf X können wir $b_{st} = b_s\, {}^s b_t$ schließen. Somit ist $b = (b_f)_f$ ein Kozykel und nach Konstruktion $x \in X(b)$. Genauer haben wir gerade gesehen, dass das Urbild von $(X/\Gamma)^F$ genau die Vereinigung aller $X(b)$ mit Kozykeln b für $H^1(F,\Gamma)$ ist.

Der Zusammenhang der $\mathcal{F}(\eta)$ folgt aus dem Zusammenhang der $X(b)$ (siehe Lemma 3.18), weil die kanonische Projektion $q : X \to X/\Gamma$ stetig ist. Ebenso wissen wir bereits, dass die Mengen $X(b)$ nicht leer sind, da X ein symmetrischer Raum nicht-kompakten Typs ist.

[4]Das Zeichen „$\bigsqcup$“ steht hier für disjunkte Vereinigung.

Bleibt zu zeigen, dass die $\mathcal{F}(\eta)$ genau die Zusammenhangskomponenten sind. Dazu verwenden wir die offenen Mengen U_b aus (3) in Lemma 3.24. Sei η eine fixe Kohomologieklasse. Wir setzen $U = \bigcup_{b\in\eta} U_b$, dies ist eine offene Menge in X. Da $q : X \to X/\Gamma$ eine Überlagerungsabbildung ist, ist $q(U)$ eine offene Umgebung von $\mathcal{F}(\eta)$. Nach Konstruktion schneidet $q(U)$ keine der anderen Mengen $\mathcal{F}(\eta')$. Daraus schließen wir, dass $\mathcal{F}(\eta)$ in $(X/\Gamma)^F$ offen ist. Da $\mathcal{F}(\eta)$ das Komplement der Vereinigung aller anderen Mengen $\mathcal{F}(\eta')$ ist, können wir schließen, dass $\mathcal{F}(\eta)$ abgeschlossen in $(X/\Gamma)^F$ ist. Da wir bereits wissen, dass $\mathcal{F}(\eta)$ zusammenhängend ist, handelt es sich um eine Zusammenhangskomponente. Da übrigens auch $(X/\Gamma)^F$ selbst abgeschlossen ist, ist $\mathcal{F}(\eta)$ auch in X/Γ abgeschlossen. □

Wir wollen die Struktur der Komponenten $\mathcal{F}(\eta)$ genauer untersuchen. Sei $b = (b_f)_{f\in F}$ ein Kozykel der Klasse $\eta \in H^1(F,\Gamma)$. Wir definieren die mit b verdrehte Wirkung von F auf Γ durch $(f,\gamma) \mapsto {}^{f(b)}\gamma := b_f\, {}^f\gamma b_f^{-1}$. Es bezeichne $\Gamma(b)$ die Menge der Fixpunkte dieser Wirkung. Dies ist eine Untergruppe von Γ und sie wirkt durch Rechtstranslationen auf $X(b)$. Dies sieht man wie folgt: Ist $x \in X(b)$ und $\gamma \in \Gamma(b)$, dann gilt

$$^{f(b)}(x\gamma) \;=\; {}^f x\, {}^f\gamma b_f^{-1} \;=\; {}^f x (b_f)^{-1} b_f\, {}^f\gamma b_f^{-1} \;=\; x\gamma.$$

Lemma 3.26. *Sei b ein Kozykel der Klasse $\eta \in H^1(F,\Gamma)$. Die stetige Abbildung $q_{|X(b)} : X(b) \to \mathcal{F}(\eta)$ faktorisiert zu einem Homöomorphismus*

$$X(b)/\Gamma(b) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(\eta)$$

Beweis. Da $\Gamma(b)$ auf $X(b)$ wirkt, faktorisiert $q_{|X(b)} : X(b) \to \mathcal{F}(\eta)$ zu einer stetigen surjektiven Abbildung $\hat{q} : X(b)/\Gamma(b) \to \mathcal{F}(\eta)$. Wir zeigen nun, dass diese offen und injektiv ist.

Die stetige Abbildung $q_{|X(b)} : X(b) \to \mathcal{F}(\eta)$ ist offen. Um dies einzusehen, nimmt man $V \subseteq X(b)$ offen und betrachtet $q(V)$. Es gibt eine offene Menge $U \subset X$ mit $X \cap U = V$. Wegen (3) in Lemma 3.24 können wir annehmen, dass U keine andere der Mengen $X(c)$ für $c \neq b$ schneidet. Da q offen ist, ist $q(U)$ offen in X/Γ und damit $q(V) = q(U)\cap\mathcal{F}(\eta)$ offen in $\mathcal{F}(\eta)$. Insbesondere muss dann auch $\hat{q}$ eine offene Abbildung sein.

Zur Injektivität: Seien x und y in $X(b)$ mit $q(x) = x\Gamma = y\Gamma = q(y)$. Es existiert daher $\gamma \in \Gamma$ mit $x\gamma = y$. Wir zeigen $\gamma \in \Gamma(b)$ durch eine einfache Rechnung:

$$yb_f \;=\; {}^f y \;=\; {}^f x\, {}^f\gamma \;=\; xb_f\, {}^f\gamma \;=\; y\gamma^{-1} b_f\, {}^f\gamma.$$

Hieraus folgt $b_f = \gamma^{-1} b_f\, {}^f\gamma$, weil die Wirkung von Γ auf X frei ist. Dies impliziert $\gamma \in \Gamma(b)$. □

Man nennt die Mannigfaltigkeiten $X(b)/\Gamma(b)$ auch *spezielle geometrische Zykel.*

Unter Verwendung dieses Lemmas sieht man übrigens auch, dass $\mathcal{F}(\eta)$ eine Teilmannigfaltigkeit von X/Γ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\hat{q} : X(b)/\Gamma(b) \to \mathcal{F}(\eta)$ eine Einbettung[5] ist. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X(b) & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow q \\ X(b)/\Gamma(b) & \xrightarrow{\hat{q}} & X/\Gamma \end{array}$$

[5]Unter einer Einbettung verstehen wir eine glatte Immersion, welche ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

und aus der Tatsache, dass die Abbildungen $X(b) \to X(b)/_{\Gamma(b)}$ und $X \to X/_{\Gamma}$ lokale Diffeomorphismen und $X(b) \hookrightarrow X$ eine Immersion ist.

5. Spezialisierung auf Untergruppen der $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$

Im Folgenden möchten wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken und versuchen mehr über die Zerlegung herauszufinden. Hierzu werden wir die Ergebnisse aus Kapitel 2 Abschnitt 2 benötigen. Wir betrachten weiterhin eine $\mathbb{Q}$-Quaternionenalgebra H. Des Weiteren betrachten wir die Wirkungen der zweielementigen Gruppe $\mathfrak{c}_2$ via τ auf $\mathrm{SL}_2(H)$ und der entsprechenden Gruppe der reellen Punkte. Außerdem fixieren wir nun eine $\mathbb{Z}$-Ordnung $\mathcal{O} \subset H$. Es sei $\mathcal{O}$ immer ein Hauptidealring und es gelte $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$. Wir können somit alle früheren Ergebnisse jederzeit verwenden. Wir schränken uns der Einfachheit halber auf den Fall $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$ ein. Im Falle $t(\mathcal{O}) = 2\mathbb{Z}$ kann man auf ähnliche Weise Aussagen treffen. Wir erinnern nochmals an das für uns wichtige Resultat:

- Es gilt $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) = \{ [1,1], [1, I_{1,1}] \}$, falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt.
- Es gilt $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})) = \mathcal{P} \cup \mathcal{N} \cup \{[1, I_{1,1}]\}$, falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt. Hier bezeichnet $\mathcal{P}$ (bzw. $\mathcal{N}$) den positiv (bzw. negativ) definiten Teil der Kohomologie, d.h. die Klassen aller Kozykel mit Signatur $(2,0)$ (bzw. $(0,2)$).

Dies ist haben wir in Satz 2.20 und Korollar 2.23 gesehen. Wir kennen also die nicht-abelsche Kohomologie der $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ziemlich gut, abgesehen von der Tatsache, dass wir keine Information über die Kardinalität des positiv bzw. negativ definiten Teils haben.

5.1. Torsionsfreie Normalteiler der SL_2. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ bettet sich über die vorgestellten Abbildungen in $SL_2(\mathbb{H})$ bzw. $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ ein. Sie ist dort eine diskrete Untergruppe. Leider ist die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ nicht torsionsfrei. Da die Torsionsfreiheit der Gruppe Γ für die Zerlegung von $(X/_{\Gamma})^{\mathfrak{c}_2}$ sehr wichtig ist, können wir nicht die ganze $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ als Γ verwenden. Es sei im Folgenden stets $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ein torsionsfreier Normalteiler, der invariant unter τ ist. Weiter nehmen wir immer an, dass der Index von Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ endlich ist, wir bezeichnen diesen immer mit $\ell := [\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}), \Gamma]$. Übrigens kennen wir bereits eine Familie von Beispielen für solche Gruppen: die Hauptkongruenzuntergruppen.

Es sei $\iota : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ die Inklusion. Wir betrachten die induziere Abbildung

$$\iota_* : H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma) \longrightarrow H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})).$$

Lemma 3.27. *Sind η_1 und η_2 in $H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)$ mit $\iota_*(\eta_1) = \iota_*(\eta_2)$, dann gilt*

$$\mathcal{F}(\eta_1) \cong \mathcal{F}(\eta_2).$$

Beweis. Es seien $(1,a)$ und $(1,b)$ Kozykel Repräsentanten für η_1 bzw. η_2. Aus Lemma 3.26 wissen wir, dass $\mathcal{F}(\eta_1) \cong X(a)/_{\Gamma(a)}$ und $\mathcal{F}(\eta_2) \cong X(b)/_{\Gamma(b)}$ gilt. Da $(1,a)$ und $(1,b)$ kohomolog bzgl. $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ sind, gibt es $g \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ mit $b = g^{-1} a\, {}^{\tau}g$. In Lemma 3.19 haben wir festgestellt, dass die Abbildung $x \mapsto xg$ einen Diffeomorphismus $X(a) \to X(b)$ liefert. Wir behaupten nun, dass die Abbildung $\gamma \mapsto g^{-1}\gamma g$ einen Isomorphismus $\Gamma(a) \to \Gamma(b)$ definiert. Wir müssen zunächst die Wohldefiniertheit zeigen. Da Γ ein Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ist, liegt das Bild dieser Abbildung in Γ. Wir sehen leicht ein, dass für alle $\gamma \in \Gamma(a)$ das Element $g^{-1}\gamma g$ ein Fixpunkt der b-verdrehten Wirkung ist:

$${}^{\tau(b)}(g^{-1}\gamma g) = b\, {}^{\tau}g^{-1}\, {}^{\tau}\gamma\, {}^{\tau}g b^{-1} = g^{-1} a\, {}^{\tau}\gamma a^{-1} g = g^{-1}\gamma g.$$

Damit ist die Abbildung wohldefiniert. Es gibt eine offensichtliche eine Umkehrabbildung, also handelt es sich um einen Isomorphismus. Man stellt fest, dass die angegebenen

Abbildungen verträglich sind, d.h.

$$(x\gamma)g \;=\; (xg)(g^{-1}\gamma g).$$

Also gilt ${X(a)}/{\Gamma(a)} \cong {X(b)}/{\Gamma(b)}$. □

Wir haben also gerade festgestellt: Viele der Fixpunktkomponenten $\mathcal{F}(\eta)$ sehen gleich aus. Genauer gibt es in beiden Fällen höchstens zwei „Arten" von Komponenten.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass H über $\mathbb{R}$ zerfällt. Dann besteht die Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ aus zwei Elementen und das eben bewiesene Lemma sagt uns, es gibt höchstens zwei Arten von $\mathcal{F}(\eta)$. Es sei $(1,1)$ der triviale Kozykel, wir führen die Notation $\mathcal{F}_1$ für die Komponente $\mathcal{F}([1,1])$ ein. Falls es einen Kozykel $(1,b)$ für $H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma)$ mit $\iota_*([1,b]) = [1, I_{1,1}]$ gibt, so bezeichnen wir $\mathcal{F}([1,b])$ mit $\mathcal{F}_2$. Die Menge $({X}/{\Gamma})^{\mathfrak{c}_2}$ ist also eine disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten, die entweder zu $\mathcal{F}_1$ oder zu $\mathcal{F}_2$ diffeomorph sind. Die interessante Frage ist, wie viele solcher Komponenten in der Vereinigung auftauchen. Es sei noch auf eine kleine Gefahr hingewiesen: In Korollar 3.22 haben wir gesehen, dass $X(b)$ immer diffeomorph zu ${\mathrm{U}(2)}\backslash{\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})}$ ist. Außerdem kann man sich leicht überlegen, dass wenn Γ sogar normal in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ ist, die Gruppen $\Gamma(b)$ für alle Kozykel b isomorph sind. Dies bedeutet aber nicht unbedingt, dass die Komponenten $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ diffeomorph sein müssen. Übrigens sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Mannigfaltigkeiten der Dimension 6.

Befassen wir uns nun mit dem Fall einer total definiten Quaternionenalgebra H. Hier ist $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ unter Umständen relativ groß, weil wir nicht wissen wie viele Klassen im positiv und negativ definiten Teil liegen. Allerdings sind alle Kozykel $(1,b)$ für $H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma)$ mit $\iota_*([1,b]) \in \mathcal{P} \cup \mathcal{N}$ „langweilig", denn sie haben Signatur $(2,0)$ oder $(0,2)$. Dies bedeutet nach Korollar 3.21, dass $X(b)$ (und damit auch $\mathcal{F}([1,b])$) ein isolierter Punkt ist. Falls es eine Kohomologieklasse η im Urbild von $[1, I_{1,1}]$ unter ι_* gibt, nennen wir die Fixpunktkomponente $\mathcal{F}(\eta)$ kurz $\mathcal{F}_3$. Bekanntlich ist $\mathcal{F}_3$ eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wissen somit: Die Fixpunktmenge $({X}/{\Gamma})^{\mathfrak{c}_2}$ ist disjunkte Vereinigung von isolierten Punkten und Kopien von $\mathcal{F}_3$.

Wir möchten nun noch einfache Abschätzungen für die Anzahl der Komponenten $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ bzw. $\mathcal{F}_3$ angeben. Dazu müssen wir die Kardinalität der Urbilder der Klassen in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ unter ι_* abschätzen. Ist $(1,b)$ ein Kozykel für $H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma)$, so betrachten wir die mit b verdrehte Wirkung von $\mathfrak{c}_2$ auf Γ. Die kurze exakte Sequenz

$$1 \to \Gamma \xrightarrow{\iota} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \longrightarrow {\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})}/{\Gamma} \to 1$$

induziert eine exakte Sequenz in der Kohomologie (siehe Proposition A.7):

$$1 \to \Gamma(b) \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})^{\tau(b)} \to ({\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})}/{\Gamma})^{\tau(b)} \xrightarrow{\delta} H^1((\mathfrak{c}_2)_b, \Gamma) \xrightarrow{\iota_*} H^1((\mathfrak{c}_2)_b, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})).$$

Da der Kern von ι_* das Bild von δ ist, gilt die einfache Abschätzung

$$|\ker(\iota_*)| \;\le\; [\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) : \Gamma] \;=:\; \ell.$$

Wie man im Appendix bei Lemma A.5 nachlesen kann, steht der Kern von

$$\iota_* : H^1((\mathfrak{c}_2)_b, \Gamma) \to H^1((\mathfrak{c}_2)_b, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$$

in Bijektion mit dem Urbild der Klasse $[1,b]$ unter $\iota_* : H^1(\mathfrak{c}_2,\Gamma) \to H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$. Wir schließen daraus, dass wir die Kardinalität jedes Urbildes von oben durch den Index abschätzen können. Zusammengefasst haben wir also folgendes

THEOREM 3.28. *Es sei H eine Quaternionen-Divisionsalgebra über dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, sowie $\mathcal{O} \subset H$ eine $\mathbb{Z}$-Ordnung. Wir nehmen an, $\mathcal{O}$ sei ein Hauptidealring mit $t(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}$. Sei außerdem $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ein torsionsfreier, τ-invarianter Normalteiler vom Index ℓ. Es bezeichne $\iota : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ die Inklusion und $\iota_* : H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma) \to H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ die davon induzierte Abbildung. Es gilt:*
(1) Falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt, ist $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ disjunkte Vereinigung von jeweils höchstens ℓ Kopien von 6-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$.

$$(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2} \;=\; \bigsqcup_{\eta \in \iota_*^{-1}([1,1])} \mathcal{F}_1 \sqcup \bigsqcup_{\eta \in \iota_*^{-1}([1,I_{1,1}])} \mathcal{F}_2$$

Hierbei ist $\mathcal{F}_1$ diffeomorph zu $X(1)/\Gamma(1)$. Die Komponenten $\mathcal{F}_2$ treten nur auf, falls eine Kohomologieklasse $[1,b]$ in $\iota_*^{-1}([1, I_{1,1}])$ existiert. In diesem Fall gilt $\mathcal{F}_2 \cong X(b)/\Gamma(b)$.
(2) Falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt, zerlegt sich $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ in eine disjunkte Vereinigung von höchstens $\ell(|\mathcal{P}|+|\mathcal{N}|)$ isolierten Punkten und höchstens ℓ Kopien einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{F}_3$.

$$(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2} \;=\; \bigsqcup_{\eta \in \iota_*^{-1}(\mathcal{P} \cup \mathcal{N})} \{\cdot\} \sqcup \bigsqcup_{\eta \in \iota_*^{-1}([1,I_{1,1}])} \mathcal{F}_3$$

Die Komponenten $\mathcal{F}_3$ treten nur auf, wenn es einen Kozykel $(1,b)$ für $H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)$ mit Signatur $(1,1)$ gibt. In diesem Fall gilt $\mathcal{F}_3 \cong X(b)/\Gamma(b)$.

Die Struktur der Komponenten $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_3$ hängt selbstverständlich von Γ ab. In der Notation sind wir übrigens etwas ungenau, denn die Komponenten $\mathcal{F}_2$ bzw. $\mathcal{F}_3$ sind gar nicht definiert, falls sie nicht auftreten. Solange wir nichts über die Kardinalität von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{N}$ wissen, ist diese Abschätzung nicht sehr hilfreich. Wie im klassischen Fall sollte es möglich sein, Abschätzungen für die Kardinalität der definiten Teile mittels Reduktionstheorie herzuleiten. Dies werden wir allerdings nicht in dieser Arbeit in Angriff nehmen. Wir werden uns stattdessen nun auf Hauptkongruenzuntergruppen einschränken und schauen, ob wir mehr Informationen über die Zerlegung bekommen können.

5.2. Details für Kongruenzuntergruppen. Es sei nun $q \geq 3$ eine ganze Zahl. Wir setzen $\Gamma := \Gamma_2(q) \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, hier bezeichnet $\Gamma_2(q)$ die Hauptkongruenzuntergruppe zum Ideal $q\mathcal{O}$ (siehe Kapitel 2 Abschnitt 3). Aus Satz 2.26 wissen wir, dass Γ torsionsfrei ist. Da $\Gamma_2(q)$ ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ ist, sehen wir außerdem, dass Γ normal in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ ist. Wir zeigen nun, dass Γ auch τ-invariant ist. Dies sieht man leicht ein, weil $\Gamma_2(q)$ invariant unter $\cdot^*$ ist: Sei $A = 1_2 + qB \in \Gamma_2(q)$, dann ist auch $A^* = 1_2 + qB^*$ offensichtlich in $\Gamma_2(q)$ und damit auch ${}^{\tau}A$. Die Gruppe Γ erfüllt also alle Voraussetzungen aus dem vorangegangenen Abschnitt.

Wir werden nun zeigen, dass in der Zerlegung aus Theorem 3.28 die Komponenten $\mathcal{F}_2$ bzw. $\mathcal{F}_3$ für Kongruenzuntergruppen nicht existieren. Das heißt, wir wollen erklären, wieso keine Kozykel im Urbild der Klasse $[1, I_{1,1}]$ existieren. Dazu werden wir auf den nützlichen Determinanten-Trick aus Kapitel 1 Abschnitt 3.1 zurückgreifen.

LEMMA 3.29. *Für alle $q \geq 3$ und alle hermiteschen Elemente $X \in \Gamma_2(q)$ gilt*

$$\det(X) \;=\; 1.$$

Beweis. Es sei $A \in \Gamma_2(q)$ eine hermitesche Matrix, das heißt, es gilt $A^* = A$. Als Element von $\Gamma_2(q)$ können wir A schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} 1+qx & qz \\ q\overline{z} & 1+qy \end{pmatrix}$$

mit gewissen $x, y \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathcal{O}$. Die Tatsache, dass x und y in $\mathbb{Z}$ liegen, folgt übrigens aus $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, denn die Ordnung $\mathcal{O}$ besteht aus ganzen Elementen und $\mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen. Nun rechnen wir die Determinante aus:

$$\det(A) = (1+qx)(1+qy) - q^2\mathfrak{n}(z) = 1 + qx + qy + q^2xy - q^2\mathfrak{n}(z) \equiv 1 \mod q.$$

Nach Voraussetzung ist A ein Element von $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$, also gilt $\mathsf{nrd}(A) = \pm 1$. Durch Bemerkung 1.42 wissen wir, dass $\mathsf{nrd}(A) = \det(A)^2$ gilt. Insbesondere sehen wir $\mathsf{nrd}(A) = 1$ und $\det(A) = \pm 1$. Schlussendlich folgern wir aus $q \geq 3$ und $\det(A) \equiv 1 \mod q$, dass $\det(A) = -1$ nicht möglich ist, □

Unter Verwendung von Lemma 1.43, das uns sagt, dass die Determinante für alle Elemente einer Kohomologieklasse in $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ gleich ist, können wir den für uns wichtigen Satz beweisen.

Satz 3.30. *Es sei $q \geq 3$ und $\Gamma := \Gamma_2(q) \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Es bezeichne weiter $\alpha(q)$ die Anzahl der Quadrate in $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Dann gilt:*
(1) Falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt, ist $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ disjunkte Vereinigung von höchstens $\frac{(q^8-1)(q^8-q^4)}{\alpha(q)}$ Kopien von $\mathcal{F}_1$

$$(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2} = \bigsqcup_{\eta \in H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)} \mathcal{F}_1,$$

wobei hier $\mathcal{F}_1 \cong \left(\mathrm{U}(2) \backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\right) / \left(\Gamma \cap \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\right)$ ist.
(2) Falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt, ist $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ disjunkte Vereinigung von höchstens

$$\frac{(q^8-1)(q^8-q^4)}{\alpha(q)}(|\mathcal{P}| + |\mathcal{N}|)$$

isolierten Punkten.

Beweis. Die Aussagen folgen direkt aus Theorem 3.28 und Lemma 3.29, denn Lemma 1.43 sagt uns, dass äquivalente Kozykel für $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ dieselbe Determinante haben. Da $I_{1,1}$ von Determinante -1 ist, kann die Klasse $[1, I_{1,1}]$ nicht im Bild von ι_* liegen. Die Zahl $\frac{(q^8-1)(q^8-q^4)}{\alpha(q)}$ kommt aus der in Lemma 2.30 hergeleiteten Abschätzung für den Index von Γ. □

Wir sind nun in der Lage etwas über die Euler Charakteristik der Menge $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ auszusagen.

Korollar 3.31. (1) *Falls H über $\mathbb{R}$ zerfällt, ist die Euler Charakteristik von $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ genau dann Null, wenn die Euler Charakteristik von*

$$\mathcal{F}_1 = \left(\mathrm{U}(2) \backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\right) / \left(\Gamma \cap \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\right)$$

verschwindet.
(2) *Falls H über $\mathbb{R}$ verzweigt, ist die Euler Charakteristik von $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ positiv.*

Fazit und Ausblicke

Wie so oft, stehen wir am Ende dieser Arbeit wahrscheinlich vor mehr offenen Fragen wie zu Anfang. Wir möchten die Gelegenheit nutzen, um unseren Weg zu rekapitulieren und dabei auf spannende offene Fragen, sowie nötige weitere Überlegungen hinzuweisen.

Kehren wir zunächst zurück zur Einleitung. Dort haben wir dargelegt, was unsere Motivation zur Untersuchung der Fixpunktmenge $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ ist, nämlich der erhoffte Zusammenhang zwischen der Euler Charakteristik $\chi\big((X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}\big)$ und der Lefschetzzahl der Abbildung $\tau : X/\Gamma \to X/\Gamma$. Dieser Zusammenhang muss natürlich in unserem Fall noch sauber bewiesen werden. Wir haben uns entschlossen, dies nicht in dieser Arbeit zu tun, weil der Autor das Gefühl hatte, dies nicht in der gewünschten Ausführlichkeit und Tiefe behandeln zu können, ohne dabei die Arbeit deutlich aufzublähen. Der wissbegierige Leser sei nochmals zu Rohlfs [**9**, prop. 1.9] verwiesen. Wenn man diesen Zusammenhang hergestellt hat, kann man natürlich auf Korollar 3.31 zurückgreifen.

Im Fall total definiter Quaternionenalgebren wissen wir, dass die Euler Charakteristik nicht Null ist. Leider haben wir keine obere Schranke, weil wir die Größe der beiden definiten Teile der nicht-abelschen Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ nicht kennen. Dies ist eine der wichtigen offenen Fragen in dieser Arbeit. Wie bereits erwähnt, scheint es eine naheliegende Idee hier Methoden der Reduktionstheorie anzuwenden.

Im Falle einer über $\mathbb{R}$ zerfallenden Quaternionenalgebra ist die entscheidende Frage sicherlich: Was ist die Euler Charakteristik von $\big(\mathrm{U}(2)\backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\big)/\big(\Gamma \cap \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\big)$? Auch diese Frage ist sicher nicht aussichtslos, weil die Dimension dieser Mannigfaltigkeit (Dimension 6) nicht erschreckend groß ist. In diesem Fall könnte man dann sogar eine Schranke mit Hilfe des Indexes angeben.

Apropos Index, wir haben auch schon erwähnt, dass unsere Abschätzung für den Index der Kongruenzuntergruppen im Allgemeinen ziemlich schlecht zu sein scheint. Eine Verbesserung dieser Abschätzung wäre nützlich, denn sie schlägt sich direkt in einer Verbesserung von Korollar 3.30 nieder. Eine weitere zu lösende Frage in diesem Zusammenhang ist, ob die Abbildung $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}) \to \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}/q\mathcal{O})$ eigentlich surjektiv ist. Für Dedekindringe ist dies bekanntlich der Fall (vgl. [**4**, S.382]).

Zwei weitere Verallgemeinerungen der angestellten Betrachtungen springen natürlich sofort ins Auge.

(1) Was passiert wenn wir als Grundkörper einen beliebigen algebraischen Zahlkörper wählen?
(2) Was passiert für beliebiges n ?

Der erste Fall erscheint lösbar. Im ersten Kapitel haben wir, auf erstaunlich einfache Weise, die quaternionischen Formen auf H-Rechtsvektorräumen klassifiziert. Das entscheidende Hilfsmittel war der Normensatz von Hasse, Schilling und Maass (Thm. 1.14). Da dieser für beliebige algebraische Zahlkörper gilt, könnte man sich ohne Angst an weitere Fälle wagen. Wie wir schon in Teilen des ersten Kapitels angedeutet haben, könnte die Behandlung für Zahlkörper ohne reelle Einbettungen sogar einfacher werden. Für allgemeine Zahlkörper wird es auf die reellen Stellen und das verhalten von H an diesen Stellen ankommen. Auch der entscheidende Satz 2.20 aus Kapitel 2 wird, keine Probleme bereiten, denn die einzige wichtige Voraussetzung war, dass $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring ist.

Um die Beschänkung $n = 2$ fallenzulassen, müsste man Satz 2.20 per Induktion verallgemeineren. Hier scheint es keinen Grund zu geben, warum dies nicht analog zum klassichen Fall möglich sein sollte. Die Struktur der Mengen $X(b)$ in Kapitel 3 haben wir ja bereits für allgemeines n bestimmt. Genauso kennen wir die nicht-abelsche Kohomologie $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ bereits.

Ein letzter Punkt, den der Autor für sehr spannend hält, ist die Frage, ob die Voraussetzung $\mathcal{O}$ sei Hauptidealring wirklich wesentlich ist. Gibt es ein einfaches Beispiel für eine Ordnung $\mathcal{O}$, die kein Hauptidealring ist und für die die Konklusion von Satz 2.20 nicht richtig ist? Es gibt viele Beispiele von Ordnungen die keine Hauptidealringe sind, aber wie findet man eine Form die zu keiner der angegebenen Formen äquivalent ist?

In der Kombination all dieser Punkte ergibt sich eine enorme Vielfalt an spannenden Fragen, die es zu lösen gilt. Zum Glück sind in der Mathematik „weite Felder“ immer ein Antrieb.

„Ach, Luise, laß ... das ist ein *zu* weites Feld.“

Theodor Fontane - Effi Briest

ANHANG A

Nicht-abelsche Galoiskohomologie

In diesem Anhang soll kurz die nicht-abelsche Galoiskohomologie eingeführt werden. Wir werden uns dabei auf jene Teile beschränken die in dieser Arbeit auftauchen. Für alles weitergehende verweisen wir auf Serre [**11**].

1. Grundlagen

Es sei F eine beliebige Gruppe. Eine *F-Menge* ist eine Menge X mit einer F-Linkswirkung. Diese notieren wir meist mit $(f,x) \mapsto {}^f x$. Eine *F-Gruppe* G ist eine Gruppe zusammen mit einer F-Linkswirkung durch Gruppenhomomorphismen $F \times G \to G$, notiert durch $(f,g) \mapsto {}^f g$. Da F durch Homomorphismen wirkt, gilt für alle $f \in F$ und $g,h \in G$

$$ {}^f(gh) \;=\; {}^f g\, {}^f h. $$

Definition A.1. Ist X eine F-Menge, so definieren wir

$$ H^0(F,X) \;=\; X^F \;=\; \{\, x \in X \mid \forall\, f \in F \;\; {}^f x = x \,\} $$

und nennen diese die *nullte nicht-abelsche Kohomologiemenge* von X bzgl. der Wirkung von F. Für jede F-Gruppe G ist $H^0(F,G)$ eine Untergruppe von G.

Es sei G eine F-Gruppe. Ein *Kozykel* in G bzgl. der Wirkung von F ist ein Tupel $b = (b_f)_{f \in F}$ mit der Eigenschaft

$$ \forall\, s,t \in F \quad b_{st} \;=\; b_s\, {}^s b_t. $$

Die Menge der Kozykel in G bzgl. der Wirkung von F bezeichnen wir mit $Z^1(F,G)$. Wir lassen den Nebensatz „bzgl. der Wirkung von F“ gewöhnlich weg, wenn klar ist, welche Wirkung gemeint ist.

Es sei 1 das neutrale Element in G. Den Kozykel b mit $b_f = 1$ für alle $f \in F$ nennt man den *trivialen Kozykel.* Ist $e \in F$ das neutrale Element von F, so folgt aus $b_e = b_{ee} = b_e\, {}^e b_e = b_e b_e$, dass für jeden Kozykel b immer $b_e = 1$ gilt. Man stellt leicht fest: Ist $g \in G$ und $b = (b_f)_f$ ein Kozykel in G, so ist auch $c_f := g^{-1} b_f\, {}^f g$ ein Kozykel. Dies sieht man durch folgende Rechnung:

$$ c_{st} \;=\; g^{-1} b_{st}\, {}^{st} g \;=\; g^{-1} b_s\, {}^s(b_t\, {}^t g) \;=\; g^{-1} b_s\, {}^s g\, {}^s(g^{-1} b_t\, {}^t g) \;=\; c_s\, {}^s c_t. $$

Zwei Kozykel $b = (b_f)_f$ und $c = (c_f)_f$ heißen *kohomolog* (geschrieben $b \sim c$), wenn $g \in G$ existiert, sodass $c_s \;=\; g^{-1} b_s\, {}^s g$ für alle $s \in F$. Dies definiert offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge $Z^1(F,G)$ aller Kozykel. Die Äquivalenzklassen bzgl. dieser Relation heißen *Kohomologieklassen.* Die Klasse des Kozykels $b = (b_f)_{f \in F}$ bezeichnen wir durch $[b]$ oder $[b_f]_f$. Die Klasse des trivialen Kozykels notieren wir mit $[1]$.

Definition A.2. Die Menge aller Kohomologieklassen von Kozykeln mit Werten in G heißt erste nicht-abelsche Kohomologiemenge von F in G.

$$ H^1(F,G) \;:=\; Z^1(F,G)/\sim $$

Diese ist eine punktierte Menge mit ausgezeichnetem Element $[1]$.

Zu einem Kozykel $b = (b_f)_f \in Z^1(F,G)$ sagen wir oft, er sei ein *Kozykel für* $H^1(F,G)$.

2. Verdrehte Wirkungen

Es sei $b = (b_f)_f$ ein Kozykel für $H^1(F,G)$. Wir definieren die mit b *verdrehte Wirkung* von F auf G durch $(f,g) \mapsto b_f\, {}^f g b_f^{-1}$. Gewöhnlich verwenden wir die Notation ${}^{f(b)}g = b_f\, {}^f g b_f^{-1}$, um deutlich zu machen, dass f durch b verdreht wirkt. Man rechnet leicht nach, dass es sich hierbei um eine Wirkung handelt:

$$ {}^{st(b)}g \;=\; b_{st}\, {}^{st}g b_{st}^{-1} \;=\; b_s\, {}^s(b_t\, {}^t g b_t^{-1}) b_s^{-1} \;=\; {}^{s(b)}(\, {}^{t(b)}g). $$

Da F durch Homomorphismen wirkt und wir diese nur mit inneren Automorphismen zusammensetzen ist auch die verdrehte Wirkung eine Wirkung durch Gruppenhomomorphismen.

Selbstverständlich können wir nun auch Kozykel für die mit b verdrehte Wirkung betrachten. Um anzudeuten, dass die mit b verdrehte Wirkung gemeint ist, schreiben wir F_b anstatt F. Für die Menge der Kozykel in G bzgl. der verdrehten Wirkung schreiben wir also $Z^1(F_b,G)$ und für die erste Kohomologiemenge $H^1(F_b,G)$.

Es gibt natürlich einen Zusammenhang zwischen $H^1(F,G)$ und $H^1(F_b,G)$.

LEMMA A.3. *Es sei $b = (b_f)_f \in Z^1(F,G)$. Die Abbildung r_b, definiert durch*

$$ r_b :\ (a_f)_{f\in F} \mapsto (a_f b_f)_{f\in F}, $$

ist eine Bijektion $r_b : Z^1(F_b,G) \xrightarrow{\simeq} Z^1(F,G)$. Weiter faktorisiert sie zu einer Bijektion ρ_b zwischen den ersten Kohomologiemengen

$$ \rho_b :\ H^1(F_b,G) \ \xrightarrow{\simeq}\ H^1(F,G). $$

Die triviale Klasse in $H^1(F_b,G)$ wird dabei auf die Klasse von b in $H^1(F,G)$ abgebildet.

BEWEIS. Wir zeigen, dass die Abbildung r_b wohldefiniert ist. Sei dazu $(a_f)_f \in Z^1(F_b,G)$. Dass $(a_f b_f)_f$ ein Kozykel für $H^1(F,G)$ ist, folgt aus der Rechnung

$$ a_{st}b_{st} \;=\; a_s\, {}^{s(b)}a_t b_s\, {}^s b_t \;=\; a_s b_s\, {}^s a_t b_s^{-1} b_s\, {}^s b_t \;=\; a_s b_s\, {}^s(a_t b_t). $$

Man rechnet analog nach, dass die Umkehrabbildung $r_b^{-1} : Z^1(F,G) \to Z^1(F_b,G)$ durch $(c_f)_f \mapsto c_f b_f^{-1}$ wohldefiniert ist.

Es seien $(a_f)_f$ und $(a'_f)_f$ Kozykel für $H^1(F_b,G)$, dann gilt:

$$ \begin{aligned} a \sim a' \;&\Leftrightarrow\; \exists\, g \in G\, \forall\, s \in F \quad g^{-1} a_s\, {}^{s(b)}g = a'_s \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, g \in G\, \forall\, s \in F \quad g^{-1} a_s b_s\, {}^s g = a'_s b_s \\ &\Leftrightarrow\; r_b(a) \sim r_b(a'). \end{aligned} $$

Folglich ist die Abbildung $\rho_b :\ H^1(F_b,G) \to H^1(F,G)$ durch $\rho_b([a]) := [r_b(a)]$ wohldefiniert und injektiv. Sie ist surjektiv, weil r_b surjektiv ist. $\square$

Es sei hier noch auf einen anderen Sonderfall von verdrehten Wirkungen hingewiesen. Sei $N \subset G$ eine normale Untergruppe, welche invariant unter der Wirkung von F ist. Insbesondere ist N selbst eine F-Gruppe. Nehmen wir einen Kozykel $(b_s)_s$ mit Werten in G, so können wir auch die Wirkung auf N mit b verdrehen, denn es ist $b_s\, {}^s h b_s^{-1}$ in N für alle $h \in N$.

Wir möchten außerdem kurz erklären wie wir auch andere Wirkungen verdrehen können. Sei zusätzlich X eine Menge auf welcher F von links (Notation $(f,x) \mapsto {}^f x$) und G von rechts (Notation $(x,g) \mapsto x.g$) wirken. Wir fordern, dass diese Wirkungen kompatibel mit der Wirkung von F auf G sind. „Kompatibel“ heißt hier, es gilt

$$ {}^s(x.g) \;=\; {}^s x.\, {}^s g $$

für alle $s \in F$, $x \in X$ und $g \in G$.

Ist $b = (b_f)_f$ ein Kozykel für $H^1(F,G)$, dann definieren wir die mit b *verdrehte Wirkung* von F auf X durch $(f,x) \mapsto {}^f x.b_f^{-1} =: {}^{f(b)}x$. Man kann leicht nachrechnen, dass dies tatsächlich eine Wirkung ist:

$$ {}^{st(b)}x \;=\; {}^{st}x.b_{st}^{-1} \;=\; {}^{st}x.\, {}^s b_t^{-1} b_s^{-1} \;=\; {}^{s(b)}(\, {}^{t(b)}x). $$

Diese Wirkung ist nun kompatibel mit der b-verdrehten Wirkung von F auf G, denn es gilt

$$ {}^{s(b)}(x.g) \;=\; {}^s(x.g).b_s^{-1} \;=\; {}^s x.\, {}^s g b_s^{-1} \;=\; (\, {}^s x.b_s^{-1}).b_s\, {}^s g b_s^{-1} \;=\; {}^{s(b)}x.\, {}^{s(b)}g $$

für alle $s \in F$, $x \in X$ und $g \in G$.

3. Exakte Sequenzen

Natürlich erwartet man gewisse funktorielle Eigenschaften von der eben definierten Kohomologie. Diese wollen wir nun kurz vorstellen. Es seien im folgenden G und H zwei F-Gruppen, sowie X und Y zwei F-Mengen.

Definition A.4. Ein Morphismus von F-Mengen $u : X \to Y$ ist eine F-äquivariante Abbildung. Ein Morphismus von F-Gruppen $u : G \to H$ ist ein Gruppenhomomorphismus, welcher F-äquivariant ist. Genauer: Für alle $g \in G$ und $f \in F$ gilt

$$ u(\, {}^f g) \;=\; {}^f u(g). $$

Offensichtlich schränkt sich jeder Morphismus von F-Mengen $u : X \to Y$ zu einer Abbildung $H^0(F,X) \to H^0(F,Y)$ ein. Ist $u : G \to H$ ein Morphismus von F-Gruppen, dann ist die Abbildung $H^0(F,G) \to H^0(F,H)$ sogar ein Gruppenhomomorphismus. Weiter gilt: $u : G \to H$ induziert eine Abbildung $\hat{u} : Z^1(F,G) \to Z^1(F,H)$, gegeben durch $\hat{u}((b_s)_{s\in F}) := (u(b_s))_{s\in F}$. Diese ist wohldefiniert, weil u eine F-äquivariante Abbildung ist. Sind $b = (b_s)_s$ und $c = (c_s)_s$ kohomolog, so stellt man leicht fest, dass auch $\hat{u}(b) \sim \hat{u}(c)$ gilt. Wir erhalten also eine Abbildung punktierter Mengen

$$ u_* :\; H^1(F,G) \to H^1(F,H) \;\text{ definiert durch }\; u_*([b_s]_s) := [\hat{u}(b)] = [u(b_s)]_s. $$

Diese Abbildung ist offensichtlich funktoriell, d.h. H^1 ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der F-Gruppen in die Kategorie der punktierten Mengen.

Dieser Funktor ist auch verträglich mit dem verdrehen von Wirkungen. Es sei

$$ u : G \to H $$

ein Morphismus von F-Gruppen und es sei $b \in Z^1(F,G)$. Verdrehen wir die Wirkung von F auf G mit b und die Wirkung auf H mit $c := \hat{u}(b)$, so ist $u : G \to H$ auch bzgl. der verdrehten Wirkungen ein Morphismus. Dies ist klar, denn

$$ u(\, {}^{s(b)}g) \;=\; u(b_s\, {}^s g b_s^{-1}) \;=\; u(b_s)\, {}^s u(g) u(b_s)^{-1} \;=\; {}^{s(c)}u(g). $$

Wir erhalten also auch eine Abbildung $u_* : H^1(F_b,G) \to H^1(F_c,H)$.

LEMMA A.5. *Es sei $u : G \to H$ ein Morphismus von F-Gruppen und $b \in Z^1(F, G)$, sowie $c := \hat{u}(b)$. Dann kommutiert folgendes Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^1(F_b, G) & \xrightarrow{u_*} & H^1(F_c, H) \\ \rho_b \big\downarrow \simeq & & \simeq \big\downarrow \rho_c \\ H^1(F, G) & \xrightarrow{u_*} & H^1(F, H) \end{array}$$

BEWEIS. Es sei $a = (a_s)_s \in Z^1(F_b, G)$ ein Kozykel in G für die verdrehte Wirkung. Man sieht sofort

$$\rho_c(u_*([a_s]_s)) = \rho_c([u(a_s)]_s) = [u(a_s)u(b_s)]_s = u_*([a_s b_s]_s) = u_*(\rho_b([a_s]_s)),$$

was die Behauptung beweist. □

Betrachte nun folgende Situation: Es sei G eine F-Gruppe und H eine Untergruppe von G, auf welche sich die F-Wirkung einschränkt. Wir sagen in diesem Fall H sei F-invariant. Dann ist H ebenfalls eine F-Gruppe. Wir erhalten eine F-Wirkung auf der Menge der Linksnebenklassen $X := G/H$, definiert durch ${}^f(gH) := {}^f gH$. Diese Wirkung ist wohldefiniert, weil H invariant unter F ist. Außerdem ist $H^0(F, X)$ eine punktierte Menge mit ausgezeichnetem Element H.

LEMMA A.6. *Ist G eine F-Gruppe und H eine F-invariante Untergruppe, dann erhält man eine exakte Folge punktierter Mengen*

$$1 \to H^0(F, H) \xrightarrow{\iota} H^0(F, G) \to H^0(F, G/H) \xrightarrow{\delta} H^1(F, H) \xrightarrow{\iota_*} H^1(F, G).$$

Hierbei bezeichnet $\iota : H \hookrightarrow G$ die Inklusion und δ heißt Einhängungsabbildung.

BEWEIS. Wir definieren zunächst δ. Es sei $gH \in H^0(F, G/H)$, wir konstruieren einen Kozykel. Für alle $s \in F$ gibt es $a_s \in H$ mit ${}^s g = g a_s$, weil nach Voraussetzung ${}^s gH = gH$ gilt. Es ist $a = (a_s)_s$ ein Kozykel für F mit Werten in H, denn ${}^{st}g = {}^s g a_t = g a_s {}^s a_t$. Wir behaupten die Klasse von $(a_s)_s$ in $H^1(F, H)$ hängt nicht von g, sondern nur von gH ab. Man überlegt sich dazu Folgendes: ist gh ein anderer Repräsentant der Klasse gH, so erhält man ${}^s(gh) = g a_s {}^s h = (gh)h^{-1} a_s {}^s h$. Der durch gh erhaltene Kozykel ist also kohomolog zu a. Wir haben also eine Abbildung $\delta : H^0(F, G/H) \to H^1(F, H)$ gefunden. Diese ist offensichtlich eine Abbildung punktierter Mengen.

Die Exaktheit der Folge an den ersten beiden Stellen ist klar. Bei $H^0(F, G/H)$ sieht man dies leicht, denn ist gH im Bild der Abbildung $H^0(F, G) \to H^0(F, G/H)$, so können wir $g \in H^0(F, G)$ annehmen. Insbesondere haben wir ${}^s g = g1$ für alle $s \in F$, damit ist $\delta(gH)$ die triviale Klasse. Ist andererseits gH im Kern von δ, so ist der Kozykel a_s definiert durch ${}^s g = g a_s$ in der trivialen Klasse bzgl H. Das heißt, es gibt $h \in H$ mit $a_s = h^{-1} {}^s h$. Damit sieht man ${}^s(gh^{-1}) = gh^{-1}$ für alle $s \in F$. Wir schließen, dass $gH = gh^{-1}H$ im Bild von $H^0(F, G) \to H^0(F, G/H)$ liegt.

Die Exaktheit bei $H^1(F, H)$ ist ebenfalls leicht nachzuprüfen. Ist $[a_s]_s$ im Bild von δ, so können wir annehmen, dass es ein $g \in G$ gibt mit $gH \in H^0(F, G/H)$ und ${}^s g = g a_s$ für alle s. Folglich ist $a_s = g^{-1} {}^s g$ in der trivialen Klasse in $H^1(F, G)$. Umgekehrt: Ist $[a_s]_s$ im Kern, so ist $a_s = g^{-1} {}^s g$ für ein $g \in G$. Also folgt $gH \in H^0(F, G/H)$ und $\delta(gH) = [a_s]_s$. □

Ist H ein Normalteiler, so ist G/H offensichtlich eine F-Gruppe und wir können obige Sequenz noch um eine Stelle verlängern.

Proposition A.7. *Jede kurze exakte Sequenz von F-Gruppen mit F-Morphismen*

$$1 \to H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \to 1$$

induziert eine exakte Sequenz punktierter Mengen

$$1 \to H^0(F,H) \overset{\alpha}{\to} H^0(F,G) \overset{\beta}{\to} H^0(F,K) \overset{\delta}{\to} H^1(F,H) \overset{\alpha_*}{\to} H^1(F,G) \overset{\beta_*}{\to} H^1(F,K).$$

Beweis. Wir beginnen wieder mit der Definition von δ. Diese funktioniert natürlich analog zur Definition von δ in Lemma A.6. Ist $k \in H^0(F,K)$, so können wir ein Urbild $g \in G$ wählen, da β surjektiv ist. Weil k Fixpunkt bzgl. der F-Wirkung auf K ist, gilt für alle $f \in F$

$$k \;=\; {}^f k \;=\; {}^f\beta(g) \;=\; \beta({}^f g).$$

Also liegt $g^{-1}\,{}^f g$ im Kern von β und damit im Bild von α. Es existieren folglich für alle $s \in F$ Elemente $h_s \in H$ mit $\alpha(h_s) = g^{-1}\,{}^s g$. Man prüft leicht nach, dass $(h_s)_s$ ein Kozykel für F mit Werten in H ist. Wählt man ein anderes Urbild g' von k, dann gilt $g' = g\alpha(x)$ für ein $x \in H$. Es ist leicht einzusehen, dass die entsprechenden Urbilder h'_s von $g'^{-1}\,{}^s g'$ einen kohomologen Kozykel definieren, denn es gilt

$$\alpha(h'_s) \;=\; g'^{-1}\,{}^s g' \;=\; \alpha(x)^{-1} g^{-1}\,{}^s g\,{}^s\alpha(x) \;=\; \alpha(x^{-1} h_s\,{}^s x).$$

Wir erhalten somit eine wohldefinierte Abbildung $\delta : H^0(F,K) \to H^1(F,H)$.

Die Exaktheit der Sequenz an den ersten beiden Stellen folgt aus der Exaktheit der kurzen Sequenz. Die Exaktheit bei $H^0(F,K)$ und $H^1(F,H)$ folgt genau wie in Lemma A.6 aus der Definition von δ. Bleibt die Exaktheit bei $H^1(F,G)$ zu prüfen. Offensichtlich liegt das Bild von α_* im Kern von β_*, denn $\beta_* \circ \alpha_* = (\beta \circ \alpha)_*$ ist die triviale Abbildung. Sei umgekehrt $b = (b_s)_s$ ein Kozykel mit Werten in G so, dass $\beta(b_s)$ in der Klasse der trivialen Kozykels liegt. Es gibt also $k \in K$ mit $\beta(b_s) = k^{-1}\,{}^s k$. Wir nutzen die Surjektivität von β und schreiben $k = \beta(g)$ für ein $g \in G$. Es liegt also $gb_s\,{}^s(g^{-1})$ im Kern von β und damit auch im Bild von α. Wir finden für alle $s \in F$ Elemente $a_s \in H$ mit $\alpha(a_s) = gb_s\,{}^s(g^{-1})$. Durch die Injektivität von α sehen wir, dass $(a_s)_s$ ein Kozykel in H ist. Nach Konstruktion gilt $\alpha_*([a_s]_s) = [b_s]_s$. □

ANHANG B

Liste verwendeter Notationen

In der ganzen Arbeit bezeichnet H eine Quaternionenalgebra, und ab Kapitel 2 ist H immer über $\mathbb{Q}$ definiert. Wir nehmen fast immer an, dass H eine Divisionsalgebra ist. Weiter ist $\mathcal{O}$ immer eine $\mathbb{Z}$-Ordnung in H. Die Konjugation auf H (siehe Kapitel 1 Abschnitt 1.3) notieren wir mit $x \mapsto \overline{x}$. Die Abbildung $\cdot^* : M_n(H) \to M_n(H)$ ist gegeben durch Konjugation und Transposition. In den entsprechenden reellen Gruppen gilt:

(1) $\cdot^* : M_{2n}(\mathbb{R}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$ definiert durch $A^* = uA^T u^{-1}$ mit $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) $\cdot^* : M_n(\mathbb{H}) \to M_n(\mathbb{H})$ definiert durch $A^* = \overline{A}^T$.

Die Involution τ auf der entsprechenden allgemeinen linearen Gruppe ist definiert durch ${}^{\tau}A := (A^*)^{-1}$.

Weitere verwendete Notationen:

$H^1(\cdot,\cdot)$	erste nicht-abelsche Kohomologiemenge (siehe Appendix A).
$\mathfrak{n}$	reduzierte Norm auf der Quaternionenalgebra H.
t	reduzierte Spur auf der Quaternionenalgebra H.
nrd	reduzierte Norm der zentralen einfachen Algebra $M_n(H)$.
$\mathsf{nrd}_{A/K}$	reduzierte Norm der zentralen einfachen K-Algebra A.
$\mathsf{tr}_{A/K}$	reduzierte Norm der zentralen einfachen K-Algebra A.
Tr	gewöhnliche Spur von Endomorphismen von Vektorräumen.
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen.
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen.
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen.
$\mathbb{H}$	Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen.
$M_n(\cdot)$	Menge der $n \times n$-Matrizen.
$M_{(m\times n)}(\cdot)$	Menge der $m \times n$ Matrizen.
$I_{p,q}$	Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$.
$\Gamma_n(q)$	Hauptkongruenzuntergruppe (siehe Kapitel 2 Abschnitt 3).
T_pM	Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit M im Punkt p.
δ_{kl}	Kronecker Delta definiert durch $\delta_{kl} = 1$ wenn $k = l$ und $\delta_{kl} = 0$ sonst.
1_n	$n \times n$ Einheitsmatrix.
$\mathrm{Sp}(n)$	quaternionische unitäre Gruppe (siehe Lemma 3.2).
$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$	reelle symplektische Gruppe (siehe Lemma 3.2).

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ über Ordnungen $\mathcal{O}$ in $\mathbb{Q}$-Quaternionenalgebren H, sowie torsionsfreien Normalteilern $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ dieser Gruppe. Die grundlegende Idee ist, dass man diese Gruppen studiert, indem man sie auf einem passenden Raum X wirken lässt. Dieser Raum X ist in unserem Fall ein symmetrischer Raum, insbesondere eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Bahnenraum X/Γ enthält dann Information über die wirkende Gruppe.

Auf der Gruppe $\mathrm{SL}_n(H)$ gibt es eine natürliche Involution τ, die von der Konjugation auf der Quaternionenalgebra herkommt. Diese induziert eine Wirkung der zweielementigen Gruppe $\mathfrak{c}_2 = \{1, \tau\}$ auf X/Γ. Wir werden die Fixpunkte dieser Wirkung bestimmen. Wie Rohlfs in **[8, 9, 10]** erreichen wir dies, indem wir die Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmannigfaltigkeit über die erste nicht-abelsche Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)$ parametrisieren. Die Bestimmung dieser Kohomologiemengen umfasst einen großen Teil dieser Arbeit.

Nach einer kurzen Einführung von Quaternionenalgebren, ist das wichtige Ergebnis des ersten Kapitels die Bestimmung der ersten nicht-abelschen Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ (siehe Korollar 1.39 und 1.40). Dazu nehmen wir in Abschnitt 2 den „Umweg" über die Klassifikation von hermiteschen Formen auf H-Rechtsvektorräumen. Danach müssen die Ergebnisse lediglich umformuliert werden, um zu erkennen, dass die Kohomologie $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$ damit bestimmt wurde.

Im zweiten Kapitel wird dann eine $\mathbb{Z}$-Ordnung $\mathcal{O}$ in H betrachtet, wobei natürlich zunächst die notwendigen Begriffe eingeführt werden. Es wird die Kohomologiemenge $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ bestimmt, unter der Voraussetzung, dass $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring ist. Das wichtige Resultat ist Satz 2.20, der den sogenannten *indefiniten Teil* der Kohomologie beschreibt. Am Ende des Kapitels werden die Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma_n(q) \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ eingeführt und es wird gezeigt, dass diese für alle $q \geq 3$ torsionsfrei sind. Außerdem findet man dort eine Abschätzung für den Index dieser Gruppen in $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

Kapitel drei widmet sich dann den geometrischen Eigenschaften dieser Gruppen. Die Involution $\tau : \mathrm{SL}_n(H) \to \mathrm{SL}_n(H)$ wird zunächst auf der Gruppe der reellen Punkte fortgesetzt. Die auftretenden Gruppen sind bekannte halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppen. Es wird definiert was ein symmetrischer Raum ist und es wird weiter erklärt wieso $X = K\backslash G$ die Struktur eines symmetrischen Raumes trägt, wenn G eine halbeinfache zusammenhängende Lie Gruppe und K die Fixpunktgruppe einer Cartan Involution ist. Danach wird dargestellt, wie Wirkungen auf G isometrische Wirkungen auf X induzieren. Schlussendlich wird mit der Methode von Rohlfs die Fixpunktmenge $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ untersucht, wobei Γ ein torsionsfreier, τ-invarianter Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ sei. Es wird gezeigt, dass $(X/\Gamma)^{\mathfrak{c}_2}$ in zwei Arten von Zusammenhangskomponenten zerfällt und, dass die Anzahl der Komponenten einer Art mit dem Index der Gruppe Γ abgeschätzt werden kann (siehe Theorem 3.28). Wenn Γ eine Kongruenzuntergruppe ist, wird außerdem gezeigt, dass nur eine Art von Zusammenhangskomponenten auftritt (siehe Satz 3.30).

Summary (English)

This thesis deals with the special linear group $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ over orders $\mathcal{O}$ in quaternion algebras H defined over $\mathbb{Q}$. Moreover, we consider torsion free normal subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. The basic idea is to study these groups by letting them act on suitable spaces X. In particular, we will choose X to be a riemannian symmetric space. Apparently, the orbit space ${}^{X}\!/_{\Gamma}$ contains information on the acting group.

Furthermore, there is a natural involution $\tau : \mathrm{SL}_n(H) \to \mathrm{SL}_n(H)$, induced by the conjugation of the quaternion algebra H. From this, one obtains an action of the group $\mathfrak{c}_2 = \{1, \tau\}$ on the space ${}^{X}\!/_{\Gamma}$. The aim is to determine the fixed points of this action. We achieve this by parametrising the connected components of the fixed point manifold $({}^{X}\!/_{\Gamma})^{\mathfrak{c}_2}$ with the elements of the first non-abelien cohomology set $H^1(\mathfrak{c}_2, \Gamma)$. This technique was developped by Rohlfs [**8, 9, 10**]. A large part of this thesis is devoted to the understanding of the first non-abelien cohomology of $\mathfrak{c}_2$ with values in several different groups.

After a short introduction to the theory of quaternion algebras, the important results of the first chapter are the corollaries 1.39 and 1.40, which give a precise description of the cohomology $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$, depending on the behavior of H over $\mathbb{R}$. In order to obtain these results we take a short detour through the classification of hermitian forms on right H-vectorspaces. Afterwards a simple reformulation, yields the description of $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_n(H))$.

In the second chapter we focus on $\mathbb{Z}$-orders $\mathcal{O}$ in H. A careful introduction of all important concepts is given. Subsequently, the cohomology set $H^1(\mathfrak{c}_2, \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ is determined under the useful assumption, that $\mathcal{O}$ is a principle ideal domain (for rightsided ideals). The important result is theorem 2.20, which describes the so-called *indefinite part* of the non-abelien cohomology. In the end of this chapter the congruence subgroups $\Gamma_n(q) \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ are defined and it is proven, that these groups are torsion free for all $q \geq 3$. Moreover, we will give an estimate for the index of these groups in $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

Finally, chapter three is concerned with the geometric properties of these groups. The involution $\tau : \mathrm{SL}_n(H) \to \mathrm{SL}_n(H)$ can be lifted to the corresponding group of real points. These groups of real points are well-known semisimple connected Lie groups. Furthermore, the definition of riemannian symmetric spaces is given and we give an explanation why the space $X = {}_{K}\!\backslash^{G}$ can be considered as such, where G is a semisimple connected Lie group and K is the group of fixed points of a Cartan involution on G. Afterwards, we quickly describe how group actions on G induce isometric actions on the symmetric space X. Eventually, let Γ be a torsion free, τ-invariant normal subgroup in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. The fixed point manifold $({}^{X}\!/_{\Gamma})^{\mathfrak{c}_2}$ is investigated using the technique of Rohlfs. It will be shown, that $({}^{X}\!/_{\Gamma})^{\mathfrak{c}_2}$ is the disjoint union of only two different kinds of connected components. Furthermore, the index of Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ is an upper bound for the number of connected components of the same kind (theorem 3.28). In addition, it is proven, that, in the case of Γ being a congruence subgroup, only one type of connected component appears (theorem 3.30).

Literaturverzeichnis

[1] Peter Bundschuh. *Einführung in die Zahlentheorie. 5. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] Werner Greub. *Linear Algebra.* Graduate Texts in Mathematics (23). Springer-Verlag, New York, 1981.

[3] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces. Reprint.* AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001.

[4] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer. *Algebra.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[5] Anthony W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction. 2nd ed.* Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston, 2002.

[6] Peter W. Michor. *Topics in differential geometry.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society (AMS), Providence, 2008.

[7] Irving Reiner. *Maximal Orders.* L-M-S Monographs. Academic Press, London, 1975.

[8] J. Rohlfs. Arithmetisch definierte Gruppen mit Galoisoperation. *Inventiones math.*, 48:185–205, 1978.

[9] J. Rohlfs. The Lefschetz number of an involution on the space of classes of positive definite quadratic forms. *Comment Math. Helvetici*, 56:272–296, 1981.

[10] J. Rohlfs. On the Cuspidal Cohomology of the Bianchi Modular Groups. *Math. Z.*, 188:253–269, 1985.

[11] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie Galoisienne.* Lecture Notes in Mathematics (5). Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[12] Jean-Pierre Serre. *A Course in Arithmetic.* Graduate Texts in Mathematics (7). Springer-Verlag, New York, 1973.

[13] Jean-Pierre Serre. *Lie Algebras and Lie Groups. 2nd ed.* Lecture Notes in Mathematics (1500). Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[14] Marie-France Vignéras. *Arithmétique des Algèbres de Quaternion.* Lecture Notes in Mathematics (800). Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[15] André Weil. *Basic Number Theory. Reprint.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

Lebenslauf des Autors

Steffen Kionke B.Sc.

Geburtsdatum:	04.12.1983
Geburtsort:	Karlsruhe, Deutschland
Staatsangehörigkeit:	Deutsch
E-Mail Adresse:	`steffen.kionke@freenet.de`

Bildungsweg

9/1994 - 6/2003	Besuch des Humboldt-Gymnasiums Karlsruhe.
27.06.2003	Abitur. Leistungskurse: Mathematik, Physik.
9/2003 - 6/2004	Zivildienst bei der Landesanstalt für Umweltschutz Baden-Württemberg.
9/2004 - 2/2008	Bachelorstudium an der TU Darmstadt im Studiengang *Mathematics with Computer Science.*
9/2006 - 7/2007	Auslandsstudium an der *École Polytechnique Fédéral de Lausanne.*
27.02.2008	Bachelorabschluss an der TU Darmstadt. Bacherlorarbeit: *Sieve Methods for the Gaussian Ring.* Betreuer: Prof. Henri Joris
3/2008 - 3/2010	Masterstudium Mathematik an der Universität Wien.

Stipendien

Stipendiat der *Studienstiftung des deutschen Volkes* seit März 2006.